UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Facultad de Filosofía y Ciencias de la Educación
Departamento de Métodos de Investigación y Diagnóstico en Educación

ADQUISICION DE LOS CONCEPTOS MATEMATICOS BASICOS. UNA PERSPECTIVA COGNITIVA

TOMO I

María Frontera Sancho

Madrid, 1992

Colección Tesis Doctorales. N.º 215/92

6-1637-6444

© María Frontera Sancho

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía.
Escuela de Estomatología. Ciudad Universitaria.
Madrid, 1992.
Ricoh 3700
Depósito Legal: M-25128-1992

La Tesis Doctoral de D. María FRONTERA SANCHO

Titulada "ADQUISICION DE LOS CONCEPTOS MATEMATICOS BASICOS. UNA PERSPECTIVA COGNITIVA.

Director Dr. D. ARTURO DE LA ORDEN HOZ

fue leida en la Facultad de Fª y CC. EDUCACION

de la UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID, el día 10

de Octubre de 19 91, ante el tribunal

constituido por los siguientes Profesores:

PRESIDENTE Dr. D. Carlos FERNANDEZ FRIAS

VOCAL Dr. D. Narciso GARCIA NIETO.

VOCAL Dra. Dª Gloria MEDRANO MIR.

VOCAL Dr. D. Antonio MEDINA RIVILLA.

SECRETARIO Dr. D. José Luis GAVIRIA SOTO.

habiendo recibido la calificación de APTO CUM LAUDE (POR UNANIMIDAD)

Madrid, a 10 de Octubre de 1991.

EL SECRETARIO DEL TRIBUNAL.

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE FILOSOFIA Y CIENCIAS DE LA EDUCACION
DEPARTAMENTO DE METODOS DE INVESTIGACION Y DIAGNOSTICO EN EDUCACION

ADQUISICION DE LOS CONCEPTOS MATEMATICOS BASICOS. UNA PERSPECTIVA COGNITIVA

TESIS DOCTORAL PRESENTADA POR MARIA FRONTERA SANCHO

DIRIGIDA POR EL DOCTOR D. ARTURO DE LA ORDEN HOZ

VOL. I

MADRID, JULIO DE 1.991

INDICE GENERAL

INDICE DE TABLAS

INDICE DE GRAFICOS

1. INTRODUCCION

El aprendizaje de las matemáticas constituye el centro de nuestro trabajo. Su alto valor formativo, el puesto destacado que tienen dentro del curriculum escolar, su importancia, como contenido, para cualquier estudio que se realice, así como su dificultad y elevada proporción de fracaso entre los escolares, son razones, más que suficientes, para detenernos en el estudio de este aprendizaje por el niño.

Pensamos que algunas de las dificultades que surgen a lo largo de la escolaridad en la adquisición de las nociones matemáticas tienen su raíz en los primeros pasos de la instrucción, y concretamente en el **tránsito de un conocimiento espontáneo a un conocimiento formal**, elaborado en la escuela. Es por ello por lo que el objeto de nuestro análisis va a ser, precisamente, este momento crítico (Preescolar y primer ciclo de EGB).

Desde una perspectiva cognitiva, como es bien sabido, se considera el aprendizaje como un proceso constructivo interno consistente en la adquisición de información procedente del medio a través de un proceso de equilibración, es decir, mediante un proceso en el que esta información interactúa con la que el sujeto ya posee y se produce una reorganización de esta última. De este modo, cuando el sujeto ha aprendido algo, esto se ha llevado a cabo debido a que se ha asimilado la información del medio y, al mismo tiempo, se han acomodado los conocimientos que se tenían previamente a los nuevos datos recientemente adquiridos (Gallagher-Reid, 1.981).

Si el sujeto se enfrenta con la realidad a partir de sus conocimientos previos, es evidente que éstos tienen una enorme importancia para el aprendizaje. De hecho, si queremos que la enseñanza escolar sea eficaz, es necesario que esté basada en el conocimiento informal de los niños, en ideas espontáneas que traen acerca de lo que vamos a enseñarles.

El conocimiento informal desempeña un papel crucial en el aprendizaje de la matemática formal (Baroody y Ginsburg, 1.986; Carpenter, 1.986; Hiebert y Lefevre, 1.986; Riley, Greeno y Heller, 1.983...): los niños tienden a interpretar y a abordar las matemáticas que se imparten en la escuela en función de su matemática informal. Por lo tanto, es esencial que la planificación educativa la tenga en cuenta : el educador puede ganar mucho tiempo conociendo, respetando y aprovechando el conocimiento informal que tiene el niño de las matemáticas (Baroody, 1.988) y se evitarían muchas dificultades en su aprendizaje derivados seguramente de una separación entre la instrucción formal y el conocimiento informal.

Cuando la enseñanza formal no se basa en los conceptos espontáneos que ya poseen los niños, el resultado es un aprendizaje memorístico y la aparición de problemas de aprendizaje, al provocarse un desfase importante entre el lenguaje matemático que se adquiere en la escuela y su significado real para el niño, moviéndose éste en dos planos totalmente diferentes, sin ninguna relación entre sí. "Incapaces de conectar la matemática formal con algo significativo, muchos niños se limitan a memorizar y utilizar mecánicamente las matemáticas que se imparten en la escuela. Algunos pierden interés por la materia o incluso desarrollan un sentimiento de rechazo hacia la misma" (Baroody, 1.988).

Conscientes, por lo tanto, de su importancia, pretendemos que nuestro trabajo contribuya a **esclarecer ese bagaje de conocimiento matemático** con el que los niños se inician en el aprendizaje formal de las matemáticas, así como a **comprender mejor las numerosas dificultades que muchos niños presentan al enfrentarse con la matemática escolar**.

El análisis que realizamos se basa en el estudio de la **resolución**, por parte del niño, de **problemas aritméticos de enunciado verbal**, presentados a través de entrevistas clínicas. Aun cuando este tipo de tareas ha venido utilizándose en la última etapa de la enseñanza de las operaciones, como aplicación del conocimiento aritmético adquirido, algunas investigaciones (Briars y Larkin, 1.984; Carpenter, Hiebert y

Moser, 1.981; Carpenter y Moser, 1.982, 1.983, 1.984; Ibarra y Lindvall, 1.982; Riley, Greeno y Heller, 1.983...) han indicado la posibilidad de que los niños pequeños, sin haber sido iniciados en tal aprendizaje, sean capaces de efectuar el razonamiento matemático necesario y hallar la solución. Si esto es efectivamente así -y esto es una de las cuestiones que tratamos de confirmar- la resolución de problemas puede constituir una actividad muy apropiada, para constatar el pensamiento matemático de los preescolares, y **seguir su desarrollo a lo largo de los primeros años de la escolaridad**, comprobando los cambios que tienen lugar con la adquisición de las operaciones aritméticas elementales (tradicionalmente consideradas como requisito).

La utilización de problemas aritméticos de enunciado verbal permite estudiar el razonamiento matemático de los niños en una diversidad de situaciones (determinadas por la variación en estructura semántica, lugar del dato desconocido y contexto lingüístico fundamentalmente). Resulta interesante, tanto desde el punto de vista del estudio de los procesos cognoscitivos en sí mismos, como desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas, el considerar la influencia que tal diversidad tiene en el modo de actuar del niño (y en definitiva en su procesamiento).

El resto de las tareas que hemos planteado a los niños tienen como objetivo una valoración más matizada de la habilidad de resolver los problemas.

Ahora bien, comprender el pensamiento matemático de los niños requiere algo más que tener en cuenta sus **respuestas correctas o incorrectas**, requiere estudiar los **procedimientos** que utilizan para resolver las tareas matemáticas presentadas así como la **naturaleza de los errores** que cometen. Como indica Vergnaud (1.983, pag.99), "es preciso respetar estos procedimientos, recogerlos y comprenderlos, ya que son la clave del obstáculo encontrado por el niño al mismo tiempo que el camino por el que se le puede hacer comprender ciertas dificultades".

Por ello, en este trabajo queremos estudiar, no sólo el **desarrollo de la habilidad para resolver problemas verbales** de mayor o menor complejidad, sino también la **transición de las estrategias** informales de los niños, desarrolladas al margen de la instrucción formal, a las que siguen tras uno y dos años de aprendizaje formal de la aritmética, así como **el cambio que tiene lugar en el tipo de errores** cometidos a medida que avanzamos en la escolaridad. Pensamos que estos datos nos ayudarán a comprender mejor el procesamiento básico cognitivo de los niños, implicado en la tarea de resolución de problemas

En nuestro intento de tener en cuenta las **variaciones interindividuales** -fundamentales siempre en el terreno educativo- valoraremos en los tres aspectos mencionados (porcentaje de respuestas correctas, estrategias y errores), el **tipo de influencia** que ejerce el **nivel de rendimiento escolar** de los niños, así como su **etapa cognitiva** (según el resultado en la tarea de Conservación del número).

En este último punto surge la controversia creada en torno a si el haber alcanzado la etapa 3 en el desarrollo de la **noción piagetiana** constituye un **requisito** para la comprensión del número y, por lo tanto, para razonar numéricamente en la solución de problemas. Pero más allá de esta cuestión, nos interesa averiguar su posible influencia cualitativa, es decir, en la modalidad de procedimientos empleados y en el tipo de errores cometido.

Con respecto al nivel de rendimiento, la cuestión esencial no está en averiguar las diferencias que marca en porcentaje de respuestas correctas -es de suponer que los de rendimiento alto consigan una mejor ejecución en los problemas que los de rendimiento medio y bajo- sino las variaciones cualitativas -en tipo de problema que resulta más difícil, tipo de estrategias y de errores- que introduce. Creemos que, desde una perspectiva educativa, tiene una destacada relevancia el comparar la influencia relativa de esta variable y la de la escolaridad: ¿en qué medida y en qué aspecto difiere la realización de los preescolares de rendimiento alto y la de los niños del nivel bajo de EGB?, o, en definitiva, ¿hasta qué punto los progresos que se observan en la resolución de problemas a medida que se avanza en la escolaridad, se deben a la instrucción recibida?. El contraste entre los mejores alumnos de Preescolar y los de peor rendimiento de EGB nos permitirá destacar las habilidades numéricas desarrolladas espontáneamente por los preescolares frente a las dificultades que aparecen al aprender las matemáticas más formalizadas que se les enseña en la escuela, ofreciéndonos la posibilidad de examinar la naturaleza y origen de éstas últimas.

En última instancia, lo que nos ha llevado a efectuar este estudio es lo que Hughes (1.987, pag.56) ha destacado como cuestión fundamental: "Cómo edificar sobre los talentos y los intereses que poseen los niños en el momento en que comienzan su escolarización".

El trabajo se estructura a partir del análisis de la situación actual de la investigación sobre el aprendizaje infantil de la aritmética, dedicando especial atención a los estudios recientes sobre la resolución de los problemas aritméticos de enunciado verbal, que revisan algunos aspectos de la teoría de Piaget acerca de la noción de número (Capitulo 2).

Tras una enumeración de los objetivos propuestos (Capitulo 3) y una referencia a la metodología utilizada (Capitulo 4), se describen los resultados obtenidos (Capitulo 5) y se procede a su análisis pormenorizado, estudiando específicamente la dificultad relativa de los distintos tipos de problemas planteados, las estrategias utilizadas y los errores cometidos, en relación con el curso, nivel de rendimiento, etapa cognitiva y grado de comprensión de las propiedades básicas de la aritmética (Capitulo 6).

Obtenidas las conclusiones (Capitulo 7), éstas nos sirven para extraer unas implicaciones educativas (Capitulo 8), entre las que destaca el papel poco afortunado que, en algunos aspectos, desempeña el actual sistema pedagógico en el primer aprendizaje de las matemáticas, ya que, por una parte, si bien suele observarse un avance en la utilización de estrategias con la progresión escolar, no es tan frecuente que ocurra lo mismo en la comprensión conceptual de los problemas, mostrando determinados niños de 1º de Preescolar resultados ventajosos a este respecto cuando los comparamos con algunos de EGB (incluso de 2º curso) y, por otra, se comprueba que cierto error (consistente en confundir la operación), aumenta con la escolaridad, alcanzando su máximo en 2º de EGB, donde aparece incluso en niños de nivel de rendimiento alto. Tales resultados, de confirmarse en un estudio longitudinal y realizado a gran escala, harían urgente un replanteamiento radical de la didáctica de las matemáticas en Preescolar y primer ciclo de EGB, para el que presentamos algunas sugerencias basadas en nuestras conclusiones.

Referencias bibliográficas

BAROODY, A. J. (1.988): El pensamiento matemático de los niños. Aprendizaje visor y Centro de publicaciones del MEC. Madrid.

BAROODY, A. J. - GINSBURG, H.P. (1.986): The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. En J. HIEBERT (Ed.): Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, pags 75-112.

BRIARS, D. J. - LARKIN, J. H. (1.984): An integrated model of skills in solving elementary word problems. Cognition and Instruction, 1, 245-296.

CARPENTER, T. P. (1.986): Conceptual knowledge: Implications from research on the initial learning of arithmetic. En J. Hiebert (ed.): Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics, 113-132. Lawrence Erlbaum Associates. Hillsdale, Nueva Jersey.

CARPENTER, T. P.- HIEBERT, J.- MOSER, J. M. (1.981): Problem structure and first-grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. Journal for Research in Mathematics Education, 12, 27-39.

CARPENTER, T.P.- MOSER, J.M. (1.982): The development of addition and subtraction problem - solving skills. En T. P. Carpenter - J. M. Moser y T.A. Romberg (Eds.): Addition and Subtraction: a cognitive perspective. Erlbaum. Hillsdale, New Jersey.

CARPENTER, T.P. - MOSER, J. M. (1.983): Acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (eds.) : Acquisition of mathematic on concepts and processes. Academic Press, Nueva York.

CARPENTER, T.P. - MOSER, J.M. (1.984): The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one trough three. Journal of Research in Mathematics Education, 15, 179 - 202.

GALLAGHER, J.M.- REID, D.K. (1.981): The learning theory of Piaget and Inhelder. Brooks-Cole, prólogo de J. Piaget y B.Inhelder. Monterrey, Ca.

HIEBERT, J.- LEFEVRE, P. (1.986): Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. En J. Hiebert (Ed.): Conceptual and Procedural Knowledge: The case of Mathematics. Lawrence Erlbaum Associates. Hillsdale, N.J.

HUGHES, M. (1.987): Los niños y los números. Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Nueva Paideia. Planeta. Barcelona. (Public. orig. 1.986).

IBARRA, C.G. - LINDVALL, C.M. (1.982): Factors associated with the ability of kindergarten children to solve simple arithmetic story problems.Journal of Educational Research, 75, 149-155.

RILEY, M.S. - GREENO,J.G. - HELLER, J.I. (1.983): Development of children's problem-solving ability in arithmetic. En H. Ginsburg (ed.): The development of mathematical thinking. Academic Press. Nueva York.

VERGNAUD, G. (1.983): Actividad y conocimiento operatorio. EnC.Coll (comp.): Psicología genética y aprendizajes escolares. Siglo XXI. Madrid. (Public. orig. 1.977).

2. ESTADO DE LA CUESTION

El aprendizaje infantil de la aritmética ha venido siendo, desde hace años, un objetivo importante en la investigación psicopedagógica. La obra de Thorndike, escrita en 1.922, "Psychology of Arithmetic", así como la de los psicólogos de la educación Buswell y Judd (1.925), ambas ampliamente citadas en la literatura, consituyen sólo un ejemplo de las numerosas investigaciones llevadas a cabo durante la primera mitad del siglo. Sin embargo, posteriormente, el trabajo sobre la psicología del número permaneció latente durante años, quizá -como ha indicado Ginsburg, 1.982- porque la teoría del momento, la teoría conductista, había alcanzado sus límites.

Luego, con el redescubrimiento de Piaget en EE UU en la década de los 60, el pensamiento matemático volvió a ser un tema en alza, investigado ahora con una nueva perspectiva, utilizando los conceptos piagetianos y el método de entrevistas clínicas.

En la década de los 70 se acometió una considerable investigación sobre el tema, dominada por la teoría de Piaget y consistente en extender ésta o en reinterpretarla.

En la década de los 80, la investigación sobre el pensamiento matemático ha continuado gozando de una considerable popularidad, que ha aumentado, si cabe, al comenzar la de los 90, sobre todo en psicología evolutiva y de la educación y en psicología cognitiva. En estos últimos años la teoría del procesamiento de la información ha sustituido el marco de referencia piagetiano como modelo de explicación general (Groen y Kieran, 1.983).

En las teorías actuales se unen las dos vías de investigación sobre desarrollo matemático que han venido compitiendo durante mucho tiempo (Resnick, 1.983): la conductista, centrada en las habilidades de ejecución y que considera el progreso en pensamiento matemático como el aumento de sucesivos procedimientos, y la cognitiva, que ha focalizado su estudio en el conocimiento básico del número, olvidando a menudo la relación entre el mismo y la realización en tareas aritméticas.

Hoy, en cambio, los psicólogos cognitivos atienden tanto al conocimiento conceptual como al de procedimientos en el aprendizaje de las matemáticas y el estudio de la profunda interacción entre ambos, constituye un objetivo importante de la investigación actual (Baroody y Ginsburg, 1.986; Briars y Larkin, 1.984; Carpenter, 1.986; Resnick, 1.983; Riley, Greeno y Heller, 1.983).

En la revisión que hacemos de la teoría sobre el tema de nuestra investigación, nos centraremos únicamente en la perspectiva cognitiva, tomando como punto de partida la teoría de Piaget acerca de la noción de número. A partir de ella, y tomándola como punto de referencia, resumiremos los principales estudios acerca del aprendizaje inicial de las matemáticas que toman como objeto fundamental de análisis la resolución de problemas por los niños, así como los modelos teóricos más destacados sobre el tema, tratando de enfatizar en todo momento, las cuestiones centrales que permanecen abiertas a la investigación.

2.1 EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMATICO SEGUN LA ESCUELA DE GINEBRA

Toda investigación actual sobre el desarrollo del pensamiento matemático tiene como referencia el trabajo de Piaget.

La proliferación de estudios en este campo, después de las obras pioneras de corte conductista, tiene lugar precisamente con el redescubrimiento de Piaget en la psicología americana y tomando los constructos y la metodología piagetiana como instrumentos de la investigación. En efecto, en la década de los 60 y comienzos de los 70, el punto de referencia dominante para la investigación sobre el temprano desarrollo numérico era proporcionado por la obra de Piaget y Szeminska de 1.941, "Génesis del número en el niño" y los estudios trataban de confirmar, extender o refutar la teoría piagetiana. La influencia de Piaget fué tan grande que llevó a Flavell a observar en 1.970 que "virtualmente todo lo de interés que conocemos acerca del temprano desarrollo del concepto de número, nace del trabajo pionero de Piaget en el área" (citado en Lesh-Landau, 1983, Pags. 11-12)

Después, cuando en los años 80 sobre todo, empieza a predominar una aproximación diferente basada en la teoría del procesamiento de la información, ésta parece desarrollarse también en relación con los estudios de Piaget, al encontrarse insuficiencias en los mismos -sobre todo por estar enfocados hacia la descripción de estructuras y categorías generales del pensamiento- para orientar una investigación que sea útil en la práctica pedagógica.

Podemos decir, por tanto, que todos los trabajos de investigación de los últimos años sobre el desarrollo del conocimiento matemático han sido influidos o bien constituyen una reacción o un intento de elaborar nuevas alternativas a la obra de Piaget. Por ello parece obligado partir de una exposición, aunque sea breve, de su trabajo realizado en este campo (Piaget-Szeminska, 1941, Trad. 1.975).

La noción de número como síntesis de las estructuras lógicas de clasificación y seriación.

El interés de Piaget no estuvo centrado -como bien se sabe- en el aprendizaje de los tradicionales cálculos aritméticos, sino en el desarrollo de las habilidades básicas de razonamiento lógico que subyacen a la concepción del número en el niño.

Parte de la hipótesis de que la noción de número es una construcción que el niño realiza por sí mismo, a través de su experiencia, y de que esa construcción es "correlativa con el desarrollo de la lógica misma" (Ibidem, pag. 10)

El principal resultado al que dice haber llegado en su investigación, es que el número es esencialmente una síntesis de las estructuras de seriación y clasificación y que se va organizando progresivamente de una forma solidaria con el desarrollo de los sistemas de inclusiones y de relaciones asimétricas.

> " Las operaciones lógicas y aritméticas se nos han aparecido como un único sistema total y psicológicamente natural, donde las segundas resultan de la generalización y fusión de las primeras, bajo sus dos aspectos

complementarios de la inclusión de clases y la seriación de las relaciones, pero con supresión de la cualidad" (Ibidem, pag. 10)

Según Piaget, la equivalencia durable (conservación) de dos conjuntos y la correspondencia biunívoca que la define, son el fundamento de la matemática formal y al mismo tiempo constituyen la base psicológica de la comprensión del número. La noción de conservación supone comprender que una vez establecida la equivalencia de dos conjuntos, los cambios en la configuración de los mismos, no modifican esa relación de equivalencia. Esta conservación está mediatizada por la operación de colocar dos conjuntos de objetos en correspondencia de uno a uno. Ahora bien, tal correspondencia implica comprender tanto la clasificación como la seriación (para establecer una igualdad, se tiene que llevar la cuenta de los elementos que se han emparejado mediante la imposición de un orden). Asi, para Piaget, el número resulta de la síntesis de estas dos entidades lógicas.

Cuando se enumera un conjunto de objetos llegando a su valor expresado en términos de un número cardinal ("aquí hay 10 objetos"), de hecho se trata a los objetos como si todos fueran iguales, como se haría en caso de asignarlos a una clase común. El niño tiene que entender que cada número incluye a los anteriores, es decir, que "tres" es una clase que incluye como subclases dos y uno, y a su vez es una subclase de los números mayores. El número encierra evidentemente un componente de clase.

Pero además, para contar los objetos es preciso ordenarlos: contar primero este objeto, luego el siguiente, y así sucesivamente. El orden de la enumeración no tiene importancia pero debe haber algún orden: es preciso contarlos en alguna forma de sucesión y tener en cuenta cuáles fueron ya enumerados para no contar más de una vez un mismo objeto. Este proceso "ordinal" está relacionado con la operación de seriación. Los objetos distribuidos en el orden en que se enumeraron forman una verdadera serie, un conjunto de relaciones asimétricas, donde las diferencias entre los objetos son únicamente de posición ordinal (primer objeto contado, segundo objeto contado...).

Las unidades numéricas son, pues, al mismo tiempo elementos de clase y de relaciones asimétricas. En un sentido son todos equivalentes, igual que los elementos de una clase ; en otro sentido, son todos diferentes, como los términos de una serie asimétrica.

Lo que constituye el número es entonces la síntesis de ese orden serial de las unidades con la inclusión de los conjuntos resultantes de su reunión. Se trata de una síntesis original y nueva a partir de dos estructuras más simples que son el "agrupamiento" de la inclusión de clases y de la seriación de las relaciones de orden (Ibidem).

Por tanto, Piaget sostiene que una aprehensión genuinamente operacional del número requiere un dominio operacional de las clases y relaciones. Cuando el niño es capaz de realizar operaciones reversibles de seriación y de clasificación, entonces y sólo entonces puede comprender realmente qué son los números y cómo se comportan.

No obstante, cuando Piaget nos insiste en que el desarrollo del concepto de número depende del desarrollo lógico de la clasificación y de la seriación, no pretende reducir el número a clases y relaciones. Tan sólo trata de poner de manifiesto sus relaciones reciprocas :

> "...La clase no es anterior al número sino que termina al mismo tiempo que éste y se apoya en él en la misma medida en que el número se apoya en la clase: sin la noción del número cardinal que interviene implícitamente en los términos "uno", "ninguno", "algunos y "todos"no podríamos concebir la inclusión de clases unas en otras: en consecuencia, las clases son en cierto sentido números no seriados, así como los números son clases seriadas, y tanto la constitución psicológica como lógica de las clases, las relaciones y los números, constituye un desarrollo de conjunto cuyos movimientos respectivos son sincrónicos y solidarios unos con los otros" (Ibidem, pag. 186)

Esto exige que nos detengamos, aunque sea muy brevemente, en el estudio del desarrollo de las operaciones lógicas de clasificación y seriación.

Según Piaget, el niño que ha alcanzado la etapa de las operaciones concretas parece tener una aprehensión básica de la relación entre las subclases y la clase superordenada, lo que constituye -como ya hemos indicado- un requisito para la comprensión del número (al mismo tiempo que éste lo es para la realización acabada de las estructuras propiamente lógicas). Los niños pequeños, al no captar la lógica de clases, son incapaces de comprender verdaderamente la noción de número ya que

> "La clase y el número proceden de un mismo mecanismo operatorio de agrupamiento " (Ibidem, pag. 193)

Para demostrar la captación que los niños hacen de las clasificaciones jerárquicas, Piaget (Ibidem, cap. VII) realiza dos tipos de experimentos: en uno se trata de averiguar las conductas espontáneas de clasificación que manifiestan los niños y el otro está centrado directamente en la comprensión de la relación de inclusión. Como resultado de estos experimentos, Piaget describió las tres etapas en el desarrollo de las operaciones elementales de clasificación, que son bien conocidas.

La aprehensión de la relación de inclusión marca precisamente el paso a la tercera etapa. En ella el niño es capaz de manejar correctamente las nociones de clase y subclase y de reconocer que una subclase está incluida en una clase sin agotarla. La movilidad y reversibilidad del pensamiento permiten ahora descomponer y recomponer los conjuntos de modo que es posible deducir sus diversas implicaciones, inclusiones y relaciones en general. Es a este punto, en el que alcanza un **dominio de todos los niveles de la jerarquía de una clase**, al que es preciso llegar para poder comprender el significado esencial del número.

Sin embargo, Piaget nos aclara que el número no es, como quería Russel, una "clase de clases". Para Russel, dos clases tienen el mismo número cuando sus elementos se corresponden de manera biunívoca y recíproca. Sin embargo -nos dice Piaget- la correspondencia cualitativa de dos clases significa sólo que estas dos clases tienen la misma estructura jerárquica, la misma composición clasificatoria, pero no el mismo número. En cambio si decimos que cualquier elemento de la clase A puede corresponder a cualquier elemento de la clase B, podemos deducir que A corresponde numéricamente a B de manera biunívoca y recíproca. El número es así, el resultado de una nueva operación: para efectuar esa correspondencia "cualquiera" o"numérica"se ha tenido que hacer antes abstracción de todas las cualidades, es decir, precisamente de las clases. Además de la inclusión propia de las clases -concluye Piaget-, hay que hacer intervenir un principio de seriación.

La seriación lógica es, por lo tanto, el otro requisito para alcanzar la noción de número. La seriación es la contrapartida de la clasificación ; mientras que para clasificar hemos de tener en cuenta aquello que hay de semejante entre los objetos, para seriar hemos de atender precisamente a las diferencias que hay entre ellos.

> "Estas dos condiciones son necesarias y bastan para engendrar el número. Si A+A'=B, y si al mismo tiempo B=A + A' (siendo vicariantes A y A', es decir, pudiendo intercambiar sus contenidos), entonces B=A+A=2A. Lo cual equivale a decir que un número es al mismo tiempo una clase y una relación asimétrica, puesto que las unidades que lo componen se adicionan en tanto son equivalentes y al mismo tiempo se serian en tanto son diferentes unas de otras."(Ibidem, pag. 216)

Es en la etapa operacional concreta cuando el niño alcanza la habilidad para utilizar las relaciones asimétricas y transitivas que se dan entre los elementos de un conjunto para ordenarlos. Esta adquisición tiene lugar -como ya hemos mencionado- al mismo tiempo que la construcción de clases lógicas y la generalización operatoria del número, ya que constituyen **manifestaciones complementarias de la misma construcción operatoria.**

A partir de los resultados en la tarea de seriación de varillas, Piaget establece, como es sabido, tres etapas. La construcción madura supone la comprensión de una forma de reversibilidad por reciprocidad y de la transitividad.

La correspondencia biunívoca y la conservación del número.

En la explicación de la génesis del número en el niño, Piaget se detiene en el estudio de la correspondencia biunívoca y recíproca por constituir, en su opinión, "una de las fuentes del número" (Ibidem, pag. 43).

La correspondencia término a término permite comparar dos cantidades y por lo tanto, definir la equivalencia de dos conjuntos determinando su valor cardinal.

> "Se nos presenta como el (procedimiento) verdaderamente constitutivo del número entero mismo, ya que proporciona el cálculo más simple y más directo de la equivalencia de los conjuntos" (Ibidem, pag. 59)

Sin embargo, esta correspondencia término a término realizada por el propio niño, no implica necesariamente la idea de una equivalencia durable entre los conjuntos que se corresponden:

> "...por si sólo, el famoso procedimiento del intercambio de uno con uno, en que tantos autores han querido encontrar el principio de la cardinación, no conduce como tal a la equivalencia necesaria de las colecciones intercambiadas. Para llegar a ese resultado, el intercambio de uno con uno, como también la correspondencia intuitiva, debe hacerse previamente operatorio, o sea, debe concebirse como un sistema reversible de desplazamientos o relaciones". (Ibidem, pag. 79)

Piaget estudia su desarrollo a través de dos clases de situaciones en que el niño llegará a descubrir o practicar la correspondencia uno a uno. En primer lugar investiga la correspondencia entre objetos heterogéneos pero cualitativamente complementarios (correspondencia entre los vasos y las botellas, entre las flores y los floreros, entre huevos y hueveras y entre centavos y mercancias). A continuación estudia los casos en se hace evaluar al niño una cantidad de objetos dados valiéndose de objetos de la misma naturaleza. Plantea al niño situaciones en que se vea obligado a inventar por si mismo la correspondencia y a utilizarla convenientemente, pero sin que la pregunta implique -como en los casos anteriores- el método de correspondencia.

Los resultados obtenidos a partir de estas experiencias llevan a Piaget a considerar tres etapas :

En la primera, el niño funda sus juicios cuantitativos en la forma de conjunto de la colección y en relaciones globales como más o menos largo, más o menos ancho, más o menos denso... pero ninguna de estas relaciones llega a coordinarse con las otras. No hay conservación de la colección como tal, porque el único análisis que el niño es capaz de hacer consiste en considerar, independientemente entre sí, un cierto número de relaciones globales y no de relaciones entre elementos; es decir, la noción de unidad no interviene todavía y las relaciones elementales acumuladas en la percepción de conjunto no están coordinadas sino sólo yuxtapuestas.

La segunda etapa está caracterizada por la correspondencia uno a uno pero sin equivalencia durable entre las colecciones. El niño tiene en cuenta de un modo simultáneo las relaciones de longitud, anchura, densidad...; pero esta coordinación incipiente no constituye un sistema de operaciones reales sino que no va más allá del plano de la percepción. Es decir, en cuanto la figura perceptiva que permitió establecer la correspondencia, se altera, no sólo desaparece ésta, sino también toda coordinación entre estas diferentes relaciones.

Finalmente, en una tercera etapa, hay correspondencia precisa y equivalencia durable. Los conjuntos, una vez puestos en correspondencia unívoca y recíproca, y equivalentes a causa de esta correspondencia, siguen siéndolo después, cualquiera que sea la disposición de los elementos. Admitir, por ejemplo, que una hilera corta pero densa corresponde término a término a una hilera más larga y menos densa es -nos dice Piaget- comprender dos verdades que hacen referencia a la esencia de la construcción del número: Por una parte que los elementos de las hileras son simples unidades equivalentes de modo que la correspondencia se basa en las nociones de unidades iguales, que difieren sólo entre sí por su orden relativo de enumeración. Por otra, que la diferencia de longitud total se compensa con las diferencias de intervalos.

> "El descubrimiento de la correspondencia"cualquiera" o propiamente aritmética supone siempre una operación nueva respecto de la simple lógica cualitativa, y esta operación es el poner en serie unidades consideradas iguales en todo excepto precisamente en la posición relativa y momentánea que cada una ocupa en la serie" (Ibídem, pag. 107).

Con esto vemos que, según Piaget, la equivalencia y correspondencia uno a uno comportan al mismo tiempo un carácter ordinal y cardinal y no implican en principio ningún primado del número cardinal sobre el ordinal.

Sin embargo, cuando se trata -como en el caso que acabamos de ver- de colecciones formadas por elementos iguales, se pueden seriar los términos en cualquier orden, siempre que exista alguno, de manera que se puedan contar todos y cada uno de los elementos y una sóla vez cada uno. En este caso se puede hacer abstracción del orden, con lo que la correspondencia adquiere un carácter predominantemente cardinal, ya que permite establecer la equivalencia de los conjuntos independientemente del orden establecido.

La correspondencia ordinal y la coordinación entre cardinación y ordinación.

Piaget, en su investigación sobre el número, se detiene asimismo en el estudio de lo que denomina correspondencia ordinal, es decir, la correspondencia entre dos conjuntos formados por elementos que presentan diferencias susceptibles de seriación; advierte, no obstante, que este caso comporta también una significación cardinal. (Ibidem, cap. V).

Los problemas que aqui se plantean son el de la construcción de la correspondencia serial, el del paso de la correspondencia serial a la correspondencia ordinal y el de la reconstitución de esta última cuando se han roto las series intuitivas.

Piaget distingue tres etapas en la solución que los niños dan a estos problemas, etapas que son sincrónicas con las establecidas en la correspondencia cardinal.

En una primera etapa no son capaces de formar una serie exacta y no utilizan espontáneamente la correspondencia uno a uno. La segunda etapa se caracteriza por una seriación y correspondencia empíricas, establecidas de una forma intuitiva. En efecto, los niños de esta etapa no llegan a comprender que un rango particular corresponde necesariamente a un valor cardinal preciso. Se manifiesta, así, una falta de coordinación entre los mecanismos cardinales y ordinales: el rango no es más que la posición del elemento en la serie cualitativa, sin ser correlativo de un valor cardinal. Cuando el niño se esfuerza por conciliar el orden con el valor cardinal, no llega a ser capaz de pensar al mismo tiempo en las dos cosas; cuando piensa en el último olvida la posición, y cuando tiene en cuenta ésta olvida el número cardinal. Sin embargo, insiste Piaget, esta falta de coordinación constituye un progreso importante con respecto a la primera etapa en la que el problema ni siquiera existía.

La seriación y la correspondencia inmediatas y operatorias marcan la tercera etapa. En ella, la cardinación y la ordinación se hallan correctamente coordinadas de modo que el término n significa ahora para el niño tanto la posición nº como una suma cardinal de n, lo que le permite resolver con éxito tanto las tareas en las que se le pide que determine un valor cardinal a partir de un rango particular como aquéllas en las que debe determinar un rango particular a partir de un valor cardinal.

De este modo, las investigaciones de Piaget tratan de mostrarnos cómo la ordinación y cardinación, mutuamente implicadas desde el punto de vista de la lógica matemática, lo están también en el plano de la génesis psicológica de las nociones..El estudio de las correspondencias cardinal y ordinal indica que la ordinación supone siempre la cardinación, y recíprocamente :

> "Un número cardinal es una clase cuyos elementos se conciben como "unidades" equivalentes entre sí y no obstante distintas, y esas diferencias consisten solamente en que se pueden seriar y, en consecuencia, ordenar. De manera inversa, los números ordinales son una serie cuyos términos, al sucederse según las relaciones de orden que les asignan los rangos respectivos, son también unidades equivalentes entre sí y susceptibles en consecuencia de reunirse cardinalmente. Los números finitos son, pues, necesariamente cardinales y ordinales al mismo tiempo, y ello resulta de la naturaleza misma del número, que es ser un sistema de clases y relaciones asimétricas fusionadas en un mismo todo operatorio" (Ibidem, pag. 186-187)

La adición aritmética.

> "...la reunión aritmética de las partes de un mismo todo constituye una de las operaciones fundamentales que engendra el número : la adición" (Ibidem, pag. 219).

Para Piaget, las operaciones aditivas están ya implícitas en el número como tal, puesto que un número es una reunión aditiva de unidades. La propia construcción del número implica la adición repetida de "1". De este modo, igual que en el caso del número, la adición no ha de ser enseñada sino que es un descubrimiento del propio niño.

Piaget se propone averiguar cómo tiene lugar este descubrimiento y si el niño encuentra en el mismo, dificultades paralelas a las que encuentra en el desarrollo de la inclusión de las clases parciales en una clase total. En su estudio, parte de la hipótesis de la solidaridad entre operaciones numéricas y operaciones cualitativas, del mismo modo que -como ya hemos visto- la construcción del número es indisociable de la de las clases y las relaciones lógicas. Así, nos aclara que la operación aditiva -tanto lógica como aritmética-

> "...se constituye cuando por una parte los sumandos se reúnen en un todo pero también cuando ese todo se considera como invariante, cualquiera que sea la distribución de sus partes". (Ibidem, pag. 223).

Teniendo en cuenta esta solidaridad, sin embargo, trata de especificar la diferencia que separa una de otra. El paso de la adición de clases a la de los números -nos dice- se produce cuando las partes dejan de considerarse como simples colecciones con su individualidad cualitativa y pasan a ser unidades susceptibles de igualarse sin identificarse. De este modo, en la adición numérica o cuantificación extensiva, todos los elementos de las diferentes colecciones se vuelven unidades equivalentes y distintas a la vez (seriables) .

El trabajo de Piaget sobre la adición y sustracción numéricas consiste básicamente en tres experimentos.

El objetivo del primero es averiguar la capacidad del niño para comprender la identidad de un todo a través de distintas composiciones aditivas de sus partes*.

El segundo experimento consiste en una tarea de igualación : se pide al niño que iguale dos colecciones con distinta cantidad de fichas que se le presentan en dos montones separados.

Por último, a través del tercer procedimiento se trata de averiguar cómo el niño llega a construir dos colecciones iguales partiendo de su suma.

En las tres experiencias Piaget encuentra tres tipos sucesivos de respuesta. En la primera etapa no hay equivalencia entre los dos conjuntos (4+4) y (1+7). El niño no es capaz de tener en cuenta a la vez el todo y las partes que lo constituyen. Su contestación se basa en la percepción inmediata y dependerá de las partes comparadas en un momento dado. El autor establece el paralelismo entre esta primera etapa y la primera etapa en el desarrollo de la inclusión de clases en la que no pueden incluirse de manera permanente dos clases parciales en un todo invariante.

En la tarea de igualación, el niño se conforma con sacar unas cuantas fichas del montón grande para añadirlas al pequeño mientras va comparando globalmente y sin sistema los nuevos montones formados. No comprende que al añadir fichas al pequeño, el grande disminuye, es decir, no llega a concebirlos uno en relación con el otro formando un todo invariante. Para Piaget en este momento de su desarrollo no son capaces de las auténticas operaciones de adición y sustracción sino sólo de

* Para ello se le dice que en dos días consecutivos se le van a dar la misma cantidad de caramelos (8), pero distribuidos de diferente forma : el primer día tendrá 4 caramelos para desayunar y 4 para merendar (se hace la representación concreta con material manipulable) y al día siguiente 1 por la mañana y 7 por la tarde (partiendo de 8 elementos distribuidos del mismo modo que antes, se desplazan 3 del primer grupo al segundo). Se le pregunta si los dos días tiene la misma cantidad de caramelos.

"acciones empíricas cuyo resultado es casual y para el sujeto imprevisible" (Ibidem, pag. 228).

El mismo resultado encuentra en la tercera experiencia : el niño separa dos mitades en forma global y les dá una forma semejante. No es capaz de concebir de una manera permanente la igualdad del todo y la suma de las partes, ni la equivalencia durable de una mitad con respecto a la otra.

En la segunda etapa la primera reacción de los niños cuando se les presenta un todo con distintas composiciones aditivas de sus partes, es la misma que antes : no hay adición de los elementos para formar el total. Pero en un momento dado llegan a darse cuenta de que el conjunto (1+7) parece al mismo tiempo más grande y más pequeño que que el conjunto (4+4), según se compare 7 y 4 ó 1 y 4. Esta doble comparación simultánea les puede llevar a la igualdad de los mismos; pero aquí la igualdad no se construye por composición aditiva sino que resulta de una verificación previa (por correspondencia o numeración). La coordinación de relaciones que aquí tiene lugar constituye sólo una cuantificación intensiva y todavía no extensiva o numérica. Cuando se le pide que iguale dos conjuntos, el niño llega a poner en relación las dos colecciones pero de una forma intuitiva, a través de figuras que va igualando con tanteos empíricos. Así, lo que sobra en una colección no resulta todavía de una sustracción numérica sino que se debe al traslado de elementos entre colecciones. Fuera de las figuras que ha formado para comparar los dos montones no tiene ningún modo para verificar las igualdades y prever el resultado de las adiciones y sustracciones. También es a través de comparaciones, reuniones y separaciones intuitivas como el niño de esta segunda etapa llega a construir dos partes iguales a partir de un todo indiferenciado. Pero un simple cambio en la disposición de los elementos le lleva a no mantener la equivalencia ni la conservación de la totalidad.

La equivalencia entre los dos conjuntos marca la tercera etapa, que Piaget hace corresponder a las terceras etapas del desarrollo de la conservación, inclusión de clases y seriación. Los niños de este nivel comprenden de forma inmediata, sin comprobaciones intuitivas, las operaciones de composición aditiva.

"Cada subconjunto se concibe en relación con el otro y ambos en relación con la suma : las relaciones en juego forman de ese modo un sistema operatorio de tal naturaleza que, habiéndose vuelto invariante, resulta de una composición por adición de las partes, y éstas, gracias a las sustracciones y adiciones combinadas, sostienen entre sí relaciones univocamente determinadas". (Ibidem, pag. 225).

Según Piaget, la comprensión de la adición y sustracción aritméticas supone haber alcanzado este nivel. A los niños de etapas anteriores es posible enseñarles fórmulas numéricas (2+3=5, 4+2=6...), pero la repetición de los mismos no supone su comprensión. Esta se alcanza cuando son capaces de concebir una suma como una totalidad que engloba los sumandos como partes, y cuando es capaz de situar las diversas combinaciones posibles en un grupo de composiciones aditivas. Mientras no se cumplan estas condiciones, no se da una comprensión operativa de la adición. Esta supone el nivel operatorio que define el número, es decir, la síntesis de la conexión y la enumeración. Piaget nos explica cómo una y otra son mutuamente dependientes, teniendo lugar una interacción entre los movimientos complementarios de análisis y síntesis de los elementos:

"Si la enumeración primitiva "más, más, etc." no es aditiva es porque no se resuelve en una totalidad estable, y si la totalización primitiva no alcanza el nivel de la conexión, permaneciendo en el nivel de las colecciones globales e intuitivas, es porque falta la enumeración aditiva" (Ibidem, pag. 236)..

El niño pequeño que constituye las primeras colecciones a las que atribuye un nombre de un número, no comprende todavía la operación de la suma, ya que ninguna operación permite al niño llegar a una conexión de las unidades en una totalidad estable. Aunque tiene conciencia del todo y de los elementos que lo forman, estas dos clases de percepción se suceden sin llegar a reunirse; de este modo, el todo tiene un carácter de sincretismo global y los elementos de yuxtaposición no aditiva.

Cabe, sin embargo, una excepción : la de los denominados por Piaget "números intuitivos", es decir, los números de 1 a 4 ó 5, o números ligados estrechamente a las cosas enumeradas y que "participan más de la percepción que de la operación"; en ellos existe ya percepción simultánea del todo y de los elementos. Se trata de "ejemplos privilegiados", fuera de los cuales los niños de la primera etapa no llegan a efectuar la enumeración y la totalización una en función de otra, lo que permitiría el establecimiento de una correspondencia uno a uno.

En efecto, para Piaget, es la síntesis de enumeración y totalización la que hace posible precisamente la correspondencia uno a uno. Para que la adición y sustracción numéricas sean operacionales, el niño debe reconocer que la totalización y la enumeración son necesariamente una la inversa de la otra : contando los elementos de un conjunto uno infiere el número de elementos del otro conjunto sin contar, siempre que se hayan formado en correspondencia uno a uno.

Esta síntesis tiene un carácter intuitivo cuando el sujeto es capaz de establecer, por primera vez, una semejanza en los elementos al mismo tiempo que en la forma de conjunto de las dos colecciones comparadas, lo que ocurre en la segunda etapa. Esta síntesis intuitiva supone un progreso importante hacia la composición aditiva, pero la adición operatoria está todavía fuera del alcance en este nivel, ya que tal síntesis se rompe en cuanto se altera la figura : el todo deja de conservarse y la enumeración pierde su posible sentido numérico.

Piaget alude, no obstante, a una situación que califica de excepcional en la que los niños de esta etapa -a una edad promedio de 5 años y medio-

> "son capaces de efectuar un razonamiento numérico y cuasi recurrente mediante una síntesis local, por decirlo así, de la inclusión y el orden, sin alcanzar todavía la conservación del número... "(Ibidem, pag. 13).

La síntesis permanente, operatoria, tiene lugar en la tercera etapa y se explica por la reversibilidad del pensamiento: al enumerar los elementos de un conjunto el niño comprende que cada rango ocupado por uno de los términos de la serie se define en relación con la colección de los elementos seriados y que esta colección constituye una totalidad invariable independientemente de su configuración perceptiva.

Sin embargo, a los 7-8 años la síntesis de la inclusión y la seriación -o lo que es lo mismo, de la totalización y enumeración- se constituye para los primeros números naturales y sólo poco a poco se va extendiendo al resto de la serie. De este modo, nos dice Piaget :

> "se asiste a una especie de aritmetización muy progresiva de la serie de los números en grupos de aproximadamente 1-7, 8-15, 15-30, etc. y donde los grupos todavía no aritmetizados conservan por mucho tiempo su carácter de simples clases o de simple orden serial, en tanto la síntesis no sea objeto de generalización".(Ibidem, pag. 13).

Para este autor, la construcción del número y las operaciones con los números, no es asunto de todo o nada, sino que se trata de un desarrollo progresivo en el que la síntesis de clasificación y seriación -que dá lugar a la comprensión operatoria del número- no se generaliza en un mismo momento a todos los números, sino que comienza teniendo lugar de un modo local en situaciones excepcionales, y luego actúa progresivamente . Esto lleva a Piaget a confirmar que el número es el resultado

> "de un proceso sintético y constructivo y no de una creación ex nihilo ni de una transformación instantánea". (Ibidem, pag. 14).

El papel del conteo en el desarrollo temprano del pensamiento matemático.

Hemos visto que el desarrollo del concepto de número depende de la evolución del pensamiento lógico. ¿Cuál es el papel que desempeña la experiencia de contar?.

Los niños pequeños pueden aprender a recitar la serie numérica a muy corta edad, pero se trata, en opinión de Piaget, de actos completamente verbales y sin significado. En numerosas ocasiones nos ha señalado la falta de coherencia entre la numeración aprendida y las operaciones que el niño es de hecho capaz de hacer. Contar no implica tener éxito en las tareas de conservación, seriación, inclusión de clases, composición aditiva...que hemos descrito más arriba:

> "...no basta al niño, de ninguna manera, saber contar verbalmente"un, dos, tres,etc."para estar en posesión del número. Un sujeto de cinco años puede muy bien, por ejemplo, ser capaz de numerar los elementos de una hilera de 5 fichas y pensar en cambio que si se reparten las 5 fichas en dos subconjuntos de 2 ó 3 elementos, estas subclases no equivalen a la colección total inicial." (Ibidem, pag.12)

Como trata de aclarar Kamii (1986), para el niño en edad preescolar, las palabras "uno","dos","tres"....son nombres de elementos individuales en la serie, como pueden ser los nombres propios "Jaime", "Juan", "Pablo", ... "Miguel". Cuando se le pregunta cuántos elementos hay, contesta con el último nombre mencionado : "Miguel". Este nombre representa el último elemento de la serie y no a la totalidad.

La cuantificación exige -ya hemos insistido en ello- establecer entre todos los elementos una relación única,sintetizando el orden y la relación de inclusión y esto, según Piaget, está fuera del alcance del niño de esta edad.

Piaget aborda de una forma sistemática la cuestión planteada, presentando a los niños unas tareas de correspondencia uno a uno en las que el número de objetos del conjunto presentado es inferior al límite de lo que el niño es capaz de contar en voz alta. Se proporcionan a éste unos centavos, preguntándole cuántos objetos podrá comprar con los mismos, si cada objeto cuesta un centavo. Después se le pide que cuente los objetos que se le acaban de dar, mientras se esconden en una mano los centavos que él ha dado a cambio (para que no pueda contarlos); el niño tiene que adivinar su número.

Con este tipo de tareas, Piaget encuentra las mismas etapas que encuentra con los procedimientos ya reseñados. Es decir, el conteo en voz alta -espontáneo o inducido- de los niños no introduce ninguna modificación :

> "...la numeración hablada no parece transformar en nada -por debajo de un cierto umbral de comprensión marcado por el comienzo de la tercera etapa- el mecanismo del pensamiento forjador de la numeración" (Ibidem, pag. 81).

Piaget, al parecer, no dá importancia al conteo de los niños preoperacionales; según él, ni tiene el estatus de precursor del conocimiento numérico más tardío, ni puede contribuir a su desarrollo:

> "No es exagerado decir que este factor verbal no desempeña casi ningún papel en el progreso mismo de la correspondencia y equivalencia...Es indudable que en el momento en que la correspondencia se vuelve cuantitativa y hace surgir una equivalencia incipiente, la numeración hablada puede acelerar el proceso de evolución. Pero los nombres de los números como tales no lo engendran, y eso es todo lo que queríamos demostrar" (Ibidem, pag. 82).

Las nociones básicas de la aritmética son una adquisición de la etapa operacional concreta.

Una de las características de los estadios, según la teoría de Piaget, es la de poseer una estructura de conjunto. La existencia de la misma implica que todas las nociones de un estadio, al poseer unas características lógicas comunes, deben resolverse aproximadamente a la misma edad

Para Piaget, el desarrollo de la comprensión del número y de la adición y sustracción aritméticas tiene unos requisitos lógicos -conceptos de seriación, clasificación, correspondencia biunívoca, conservación- que aparecen con la etapa operacional concreta. Por lo tanto, tal comprensión no puede tener lugar en un momento anterior, sino que será simultánea a la adquisición de tales conceptos.

2.2. INVESTIGACIONES ACTUALES ACERCA DEL APRENDIZAJE DE LAS NOCIONES MATEMATICAS ELEMENTALES

2.2.1 Relación con los trabajos de Piaget.

La investigación piagetiana ha ido normalmente por derroteros distintos de la investigación acerca del aprendizaje de la aritmética que se aprende en la escuela. Piaget no estuvo explícitamente interesado en el aprendizaje de los tradicionales cálculos aritméticos. Su preocupación, como acabamos de resumir, estuvo, más bien, en el desarrollo del razonamiento lógico básico que subyace a la concepción del número en el niño. Menor atención dirigió a los conceptos subyacentes de adición y sustracción, que, por otra parte, han sido también menos replicados que los de Conservación, Seriación e Inclusión.

No está claro cómo el desarrollo de estos conceptos afecta al aprendizaje de las nociones y habilidades aritméticas enseñadas en la escuela. Algunos estudios (Carpenter, 1.980; Gelman, 1.982; Groen y Parkman, 1.972; Groen y Resnick, 1.977; Hiebert y Carpenter, 1.982; Hughes, 1.987; Mpiangu y Gentile, 1.975; Pennington, Wallach y Wallach, 1.980; Starkey y Gelman, 1.982...) han intentado establecer empíricamente la relación entre el desarrollo de la Conservación, Inclusión y otros constructos piagetianos, y la aritmética escolar.

Los estudios de Carpenter (1.980) y Hiebert y Carpenter(1.982) encontraron correlaciones altamente positivas entre la ejecución de los tests sobre tareas piagetianas y varias medidas de rendimiento aritmético. Sin embargo, las correlaciones positivas no han demostrado que el desarrollo de los constructos básicos identificados por Piaget constituyan requisitos para la adquisición de conceptos y habilidades de adición y sustracción. De hecho, niños que no pasan los tests tradicionales de Conservación, Seriación o Inclusión de clases, puede aprender a sumar y restar, y las medidas básicas piagetianas parecen tener limitada utilidad en la explicación de la habilidad infantil para realizar estas operaciones aritméticas (Carpenter y Moser, 1.983).

Starkey y Gelman (1.982) revisaron una serie de estudios que demostraban claramente que la Inversión y Compensación, principios básicos de adición y sustracción, parecen desarrollarse de forma similar, pero no sincrónica, con el desarrollo de la Conservación y otros conceptos operacionales concretos.

Así, nos indican que para Smedslund (1.966) y para Cooper (1.978), la tarea de Conservación del número era más difícil de resolver que los problemas de Inversión (añadiendo un determinado número de elementos a un conjunto, puede ser negado sustrayendo el mismo número de elementos) y Compensación (si la relación numérica inicial entre dos conjuntos se altera añadiendo o sustrayendo elementos a uno de ellos, la original relación puede reinstaurarse añadiendo o sustrayendo elementos al otro conjunto). Starkey (1.978), sin embargo, encontró que la Conservación del número era significativamente más sencilla que un tipo de problemas bastante difíciles de Compensación que planteó a los niños.

El resultado consistente a través de los estudios de Smedslund, Cooper y Starkey -continúan los mismos autores- es que no se encontró una relación bicondicional entre Conservación del número y Compensación-Inversión; esto es, que no se dió el caso de que una proporción significativa de niños que resolviendo el problema de Inversión o Compensación, resolvieran también el problema de Conservación y viceversa. Concluyen indicando que "la dificultad relativa de la Conservación del número y de la Inversión-Compensación, depende del tipo especifico de tareas de Conservación, Inversión y Compensación presentadas" (Pag. 111).

El estudio de Pennington, Wallach y Wallach (1.980) -realizado con niños no conservadores que habían recibido instrucción en Aritmética-prueba y confirma la hipótesis de que los niños que fallan en la tarea piagetiana de Conservación del número pueden, no obstante, utilizar y comprender el conteo y la aritmética en diversas situaciones, entre las que se incluye la resolución de problemas de adición y sustracción.

Para estos autores, el hecho de fallar la tarea de Conservación, incluso bajo las condiciones más favorables, no indica necesariamente que el niño no espere que el número permanezca cuando los objetos se ordenan de otro modo. En su opinión, es mucho más verosímil que el niño tenga algún conocimiento de la invarianza numérica pero que, en la situación específica de la tarea de Conservación, domina el juicio basado en señales perceptivas.

En relación con ésto, hay que aludir a los trabajos que muestran cómo niños bastante pequeños manifiestan la invarianza numérica en determinadas situaciones: cuando está claro cuál es la cuestión y cuando no hay señales perceptivas conflictivas (Gelman y Gallistel, 1.978; McGarrigle y Donaldson, 1.974, citados en Donaldson, 1.978).

En opinión de este último autor los niños fallan en las tareas piagetianas porque el problema que se les plantea no coincide con la interpretación natural que el niño hace de la situación. El niño tiene que pensar acerca del lenguaje utilizado por el adulto, con independencia del contexto en el cual se esté utilizando dicho lenguaje.

Para Gelman y Gallistel, los preescolares fallan en la tarea piagetiana de Conservación, a pesar de revelar en la "tarea mágica"* que saben que las operaciones de suma y resta cambia el tamaño de la colección, mientras que un cambio en la longitud de una serie es irrelevante para el número, porque carecen de una comprensión explícita del principio de correspondencia uno a uno. A pesar de una comprensión implícita de la correspondencia uno a uno, esta comprensión es inaccesible bajo la mayor parte de las circunstancias. Estos autores mantienen que la comprensión de los preescolares de que dos conjuntos son numéricamente iguales, se basa en su habilidad para determinar si dan el mismo valor cardinal cuando se cuentan. De aquí que a los preescolares se les concede la habilidad para razonar acerca de valores específicos pero no inespecíficos. Si, como Piaget señaló, una prueba verdadera de usar la correspondencia uno a uno excluye la tendencia a contar y conseguir una representación numérica específica, el éxito está fuera de las posibilidades de los niños.

---

* La tarea consiste en mostrar a los niños un conjunto de un reducido número de objetos (por ejemplo tres). A continuación, tal conjunto se altera subrepticiamente (de forma "mágica"), bien reordenando tan sólo los objetos, bien modificando su número (añadiendo o quitando). En ambas situaciones se anota con cuidado la reacción de los niños ante el cambio en la estructura.

Posteriormente, Gelman (1.982) pone en cuestión la versión fuerte de Gelman y Gallistel que sostiene que los preescolares no son capaces nunca de razonar acerca de valores numéricos no específicos por lo que son incapaces de razonar acerca de juicios de equivalencia derivados de una comprensión de la correspondencia uno a uno. En su investigación pone de manifiesto que la habilidad implícita de usar la correspondencia uno a uno en el conteo, se hace explícita por entrenamiento. No obstante, aclara que la competencia de los preescolares "es frágil, que puede aparecer y desaparecer una y otra vez, que es usada sólo en situaciones restringidas, que no se generaliza fácilmente. En otras palabras, tienen un limitado acceso a sus competencias" (Pag.218).

Si los niños pequeños han alcanzado un "esquema de invarianza del número" (Gelman, 1.982, pag.209), a pesar de no resolver la tarea piagetiana, entonces, los no conservadores no tienen por qué tener dificultades en la comprensión y uso del conteo y de la aritmética.

A la Conservación del número se le concede el estatus de fundamento lógico del concepto del número, pero -indican Pennington, Wallach y Wallach (1.980)- "un análisis de los fundamentos lógicos de los conceptos es una cuestión muy diferente que el análisis de su desarrollo" (Pag. 233). El análisis lógico, "por su propia naturaleza, no permite conceptos parciales e imprecisos; pone el interés en la elegancia conceptual y busca los principios más abstractos, generales y simples. El desarrollo cognitivo temprano, por otra parte, parece mucho más una cuestión hecha por partes, consistente en la adquisición de reglas bastante discretas y específicas de la situación, y habilidades que sólo más tarde darán lugar a unos principios más generales y unificados... Una analogía más prometedora para el desarrollo del número en el niño podría ser la historia, más que la filosofía de las matemáticas" (ibídem, pag.242).

Una posición semejante es la que mantienen Groen y Kieran (1.983), quienes indican que "la conservación y la reversibilidad tienen su origen en nociones más epistemológicas que psicológicas. Surgen de consideraciones formalizadas de la estructura del conocimiento, más que de una teoria sobre el pensamiento infantil" (pag.360).

Sin embargo, siguiendo un método de "análisis de tareas", partiendo de la actuación de los niños en el campo de la aritmética, Resnick (1.983) presenta una teoría que, como él mismo hace notar, tiene importantes paralelismos con la interpretación piagetiana del número. En efecto, su análisis comparte con el de Piaget dos temas centrales:

- que las relaciones "parte todo" (inclusión de clases para Piaget) constituyen una característica que define la comprensión del número,

- y que las relaciones ordinales (conteo) y cardinales (parte-todo), deben combinarse en el curso de la construcción del concepto del número.

Resnick destaca haber llegado a esta convergencia a través de un análisis realizado con independencia con respecto al trabajo de Piaget: "No me puse a tratar de defender o desconfirmar la teoría piagetiana sobre la comprensión del número, sino a construir una explicación plausible desde el punto de vista de la ciencia cognitiva actual acerca de qué conocimiento numérico debe subyacer a las 'performances' aritméticas observadas en los niños pequeños" (Pag.147).

Para este autor, las realizaciones de los preescolares que se han venido confirmando en el campo de la matemática, requieren tan sólo una representación primitiva del número comparada con la que se desarrollará más tarde. "Parece plausible -nos indica- que los niños pueden poseer una versión simplificada del esquema 'Parte-Todo' a una edad bastante temprana, pero pueden no haber aprendido todavía todas las situaciones donde es apropiada su aplicación... La adición y sustracción de números pequeños, simplificada por el contenido de una historia, puede ser una de las situaciones en las que se reconoce fácilmente la aplicación de un esquema primitivo de 'Parte-Todo' en los problemas sencillos, puede ser un importante escalón en el desarrollo de una versión más elaborada, implicando muchas conexiones de procedimientos, de modo que jugará un papel en el desarrollo subsiguiente del conocimiento del número" (Pag. 125).

No obstante, como expresan los modelos teóricos de Riley, Greeno y Heller (1.983) y de Briars y Larkin (1.984), la habilidad de resolver los problemas verbales más difíciles supone una capacidad más acabada de representar las relaciones parte-todo. En España, el trabajo de Bermejo y Rodríguez (1.987) se sitúa en esta línea de investigación.

Encontramos, por lo tanto una postura con respecto al esquema Parte-Todo, que nos evoca a la mantenida por Gelman y por Pennington, Wallach y Wallach en relación al de invarianza numérica: se defiende su operatividad progresiva, permitiendo a los niños realizaciones que ponen de manifiesto la aplicación de tales esquemas en situaciones restringidas.

Un tema fundamental será explicar las diferencias de conocimiento entre niños que demuestran comprensión de un concepto en una tarea sencilla sólo y los niños cuya comprensión conceptual se generaliza a través de un rango de tareas que aparentemente incluyen el mismo concepto (Riley, Greeno y Heller, 1.983, pag.192).

Los niños que son más experimentados -nos indican- han adquirido esquemas que funcionan como principios para organizar la información en un problema en un modo "top-down", desechando las características irrelevantes de la situación, mientras que los niños que no han alcanzado estos esquemas no pueden hacer esas inferencias y dependen de las modificaciones de las situaciones del problema que hagan explícitas las relaciones a través de cambios de vocabulario o cambios perceptivos. El desarrollo de un esquema hasta el punto en que pueda usarse para organizar una situación-problema, pasando por alto los factores irrelevantes, es de gran importancia.

Concluyen estos autores diciendo que "Piaget puede haberse equivocado en asertar que a los niños les faltaba la comprensión de un esquema si fallaban sus tests para tal comprensión, pero está desigualmente desencaminado asertar que un esquema está comprendido si podemos encontrar evidencia para tal comprensión en algún dominio limitado de tareas" (Pag.192).

Por otra parte, una crítica al punto de vista de Piaget y de la Escuela de Ginebra, muy común entre los estudiosos actuales del aprendizaje de las matemáticas elementales, consiste en indicar que este autor subestimó una habilidad básica cuantitativa como es el **conteo.**

Si el conteo es en los niños pequeños un proceso rutinario, tal como indicó Piaget -dicen Starkey y Gelman, 1.982- cómo podría el niño inventar algoritmos de conteo adecuados (correctos y válidos)?, ¿cómo podrían los niños pequeños usar la información obtenida por conteo para hacer juicios de más-menos y resolver problemas de inversión y compensación?...Resultados como estos ponen de manifiesto, según estos autores, que las afirmaciones de Piaget no se ajustan a la realidad.

En contraste con la perspectiva piagetiana, diversos trabajos actuales (Baroody, 1.988; Carpenter, Blume, Hiebert, Anick y Pimm, 1.981; Carpenter y Moser, 1.983; Fuson y Hall, 1.982; Gelman y Gallistel, 1.978; Hughes, 1.987; Klahr y Wallace, 1.976; Starkey y Gelman, 1.982...) han enfatizado la importancia del conteo como una habilidad cuantitativa básica, fundamental para la comprensión infantil del número: "Contar ofrece a los niños el vínculo entre la percepción directa concreta y las ideas matemáticas abstractas y generales. Contar coloca el número abstracto y la aritmética elemental al alcance del niño pequeño... la experiencia de contar... ofrece a los niños una base para adquirir técnicas numéricas y aritméticas" (Baroody, 1.988, pag.45-46).

Así, se considera que las operaciones aritméticas elementales de adición y sustracción, se construyen sobre la capacidad de contar (Gelman, 1.972, 1.982; Gelman y Gallistel, 1.978). El niño adquiere tal habilidad antes de ser capaz de resolver la tarea piagetiana de

Conservación del número e incluso puede constituir un factor importante en la construcción de este concepto: "la abstracción de numerosidades precisas a partir de objetos discretos puede contribuir al desarrollo de la comprensión de la conservación y de las leyes básicas de la aritmética" (Starkey y Gelman, 1.982, pag.113). De hecho, los niños pequeños suelen basarse en el conteo para realizar sus juicios sobre la conservación de la cantidad y sólo después dependen de reglas relativamente abstractas: "...parece que contar es, más que igualar, la vía natural de los niños para llegar a comprender las relaciones de equivalencia, no equivalencia y orden con números no intuitivos" (Baroody, 1.988, pag.115). Por otra parte, el entrenamiento en la práctica del conteo y otras habilidades numéricas facilitan, al parecer, la adquisición de la conservación de la cantidad (Clements, 1.984; Starkey y Cooper, 1.980).

Cómo interactúan el conocimiento conceptual y el de procedimientos cuando los niños aprenden a contar es actualmente materia de debate. Algunos investigadores sostienen que el desarrollo de conceptos o principios de conteo precede a la adquisición de habilidades (Gelman, 1.982); Gelman y Gallistel, 1.978; Gelman y Meck, 1.983, 1.986) y que los niños saben más conceptualmente que lo que son capaces de demostrar a través de los procedimientos. Otros investigadores, en cambio, creen que algunas habilidades de conteo se adquieren al principio como procedimientos de rutina y más tarde llegan a ser informadas por conocimiento conceptual (Baroody, 1.987; Baroody y Ginsburg, 1.986; Fuson y Hall, 1.983...). Sea como fuere, conceptos y procedimientos intervienen conjuntamente cuando los niños aprenden a contar: el desarrollo de técnicas y conceptos está entrelazado. Los conceptos numéricos y contar significativamente se desarrollan de forma gradual y son el resultado de aplicar técnicas para contar y conceptos cada vez más elaborados (Baroody, 1.988). En la actualidad, parece claro que si queremos alcanzar una visión integral del número, es necesario atender a ambos tipos de adquisiciones. Las adquisiciones de destrezas numéricas facilitan evolutivamente la adquisición de conocimientos numéricos y viceversa. Incluso algunos piagetianos han llegado a la conclusión de la importante contribución de las actividades de contar en el desarrollo del número, añadiendo, no obstante, una importante matización: "Aunque es la estructura mental la que permite al niño cuantificar objetos, yo hipotetizo que el pensamiento implicado en la cuantificación de objetos debe también ayudar al niño a construir la estructura mental *si se encuentra ya en un nivel avanzado de su construcción*" (Kamii, 1.984, pag.32).

El desarrollo del número tiende a considerarse hoy como un conjunto de desarrollos parciales en el que cada uno de ellos colabora en el de sus contemporáneos y sucesores, siendo, al mismo tiempo, ayudado por sus contemporáneos y predecesores.

La investigación actual sobre el aprendizaje de la aritmética escolar difiere también de la investigación piagetiana en otro aspecto importante: En la mayor parte de los estudios de Piaget, los niños preoperacionales son retratados en un particular aspecto negativo, poniendo el énfasis en los errores que cometen y en los conceptos falsos que tales errores revelan. Como Flavell (1.984) apunta, incluso su etiqueta "preoperacional" señala su situación de inferioridad. En relación con el pensamiento matemático, Piaget estaba convencido de que la mayor parte de los conocimientos numéricos elementales no estaban totalmente desarrollados en los niños hasta los 7 años; reconoció que durante la fase preoperacional los niños disponen de cierta comprensión de los números pequeños, "pero desechó esta capacidad calificándola de "intuitiva" y no se ocupó demasiado de cómo encajaba este fenómeno dentro de su teoría más amplia" (Hughes, 1.987, pag. 56).

La mayor parte de la investigación actual atribuye un nivel mucho más elevado de la comprensión de los conceptos numéricos básicos en los niños pequeños. Más que poner el foco en los conceptos erróneos de los pequeños, los estudios recientes sobre el conocimiento matemático describen el desarrollo de lo que ellos **pueden** hacer, poniendo de manifiesto una secuencia de desarrollo de los conceptos de adición y sustracción en la que los procesos de solución, perfectamente válidos en un comienzo, son reemplazados por procesos cada vez más eficientes y abstractos (Carpenter y Moser, 1.983).

Otro tipo de critica muy común entre los estudiosos del primer aprendizaje de la aritmética tiene que ver con los **estadios** propuestos en la teoría. Como es sabido, la existencia de **desfases** horizontales ha sido reconocida en la teoría de Piaget y explicada en términos de "resistencias de los objetos". Sin embargo, se mantiene que dentro de un área de particular contenido o dominio cognitivo, el desarrollo presenta una homogeneidad, poniéndose de manifiesto que los niños poseen o no la estructura que caracteriza un determinado estadio evolutivo.

Algunos de los resultados encontrados no confirman este aspecto de la teoría de Piaget, destacando que"dentro del dominio del número, el desarrollo de los 'procesos operacionales concretos', tiene lugar por partes, más que de un modo holístico, de todo o nada" (Starkey y Gelman, 1.982, pag. 112). Se sugiere que los niños pequeños poseen conocimiento y competencias localizadas, que la comprensión temprana de la aritmética tiene lugar localmente, en particulares principios y que la comprensión de estos principios es progresiva, procede a través de niveles más y más complejos. En opinión de los autores mencionados, "el punto de vista de estadios claramente definidos y transiciones bruscas dentro de un particular dominio, necesita modificación" (Ibídem).

Todo ello ha llevado a algunos autores a cuestionar la relevancia directa de la teoría de Piaget para la comprensión del aprendizaje de las matemáticas en la escuela: "La teoría de Piaget no es capaz de pronosticar la clase de dificultades que tendrán los niños, ni de ofrecer sugerencias específicas sobre cómo hacerles frente"(Hughes, 1.987, pag.38).

En este mismo sentido se manifiestan Groen y Kieran (1.983), quienes se plantean directamente la cuestión "Es Piaget relevante para las matemáticas escolares?" (Pag.352). Para estos autores, existen muchas lagunas en lo que Piaget proporciona, como para que pueda servir como base para una didáctica de las matemáticas. Destacan que se da una brecha entre las tareas piagetianas y las tareas matemáticas escolares: aunque puede haber alguna conexión, no hay una explicita.

La mejor manera de comprender el aprendizaje de las matemáticas escolares y las dificultades que encuentran los niños en el mismo, consistirá en analizar "cómo rinden con respecto a problemas que se parecen más a los problemas con los que se enfrenta en la escuela" (Hughes, 1.987, pag.39).

Para terminar, subrayaremos que la mayor parte de la investigación actual sobre los conceptos numéricos básicos en el niño comparte con la investigación piagetiana el interés por los procesos cognitivos internos. Precisamente, el primer intento de ir más allá del simple análisis de la dificultad del problema, describiendo el conocimiento infantil de la aritmética, fué proporcionado por la investigación basada en el trabajo de Piaget. Sin embargo, los estudios actuales, en lugar de centrarse en las habilidades básicas subyacentes, examinan directamente los procesos que utilizan los niños en la resolución de los problemas aritméticos que son el centro del currículum de las matemáticas.

2.2.2 Estudios acerca de la resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal.

La consideración de las matemáticas, desde un punto de vista cognitivo, como "un sistema de ideas y métodos fundamentales que permiten abordar problemas matemáticos" (Baroody, 1.988, pag. 51), en lugar de como una acumulación de datos numéricos y técnicas, ha llevado a considerar la resolución de problemas como un principio fundamental en la didáctica de las matemáticas.

Por esta razón, los problemas verbales han llegado a constituir el foco de un creciente cuerpo de investigación y una gran parte de los trabajos recientes sobre el primer aprendizaje de las matemáticas se centra precisamente en ellos (Briars y Larkin, 1.984; Carpenter, Hiebert y Moser, 1.981; Carpenter y Moser, 1.982, 1.983, 1.984, 1.985; Ibarra y Lindvall, 1.982; Lindvall e Ibarra, 1.980; Riley, 1.981; Riley, Greeno y Heller, 1.983; Steffe y Johnson, 1.971; Tamburino, 1.980; Vergnaud, 1.982...).

Pero, además del motivo educativo, hay también razones metodológicas para focalizar el interés en tal estudio (Carpenter y Moser, 1.983): Por una parte, el dominio de problemas es suficientemente sencillo como para que las diferencias entre ellos puedan ser especificadas con un razonable grado de claridad, y, por otra, el dominio es suficientemente rico como para proveer una variedad de problemas, estrategias de solución y tipos de error. Del mismo modo, los procesos de solución de los niños son a la vez bastante sencillos como para proporcionar alguna esperanza de comprenderlos y modelarlos, y bastante complejos como para ser interesantes.

Podemos encontrar una revisión de la investigación realizada sobre la resolución de problemas verbales de adición y sustracción en Carpenter, Blume, Hiebert, Anick y Pimm (1.982), Carpenter y Moser (1.983, 1.984), así como en Riley, Greeno y Heller (1.983).

Ha habido varias aproximaciones en la caracterización de problemas verbales. Una de ellas consiste en clasificar los problemas en términos de sintaxis, nivel de vocabulario, número de palabras en el enunciado...(Jerman 1.973-1.974; Jerman y Rees, 1.972; Loftus, 1.970; Suppes, Loftus y Jerman, 1.969). Los análisis de regresión indican que una gran proporción de la varianza en la dificultad del problema puede ser explicada por estos factores (Loftus y Suppes, 1.972).

Una segunda aproximación diferencia los problemas en función de la sentencia numérica que representa las relaciones entre las cantidades dadas en el problema (Grows, 1.972; Ibarra y Lindvall, 1.982; Lindvall e Ibarra, 1.980; Rosental y Resnick, 1.974). Distintos estudios dan resultados consistentes en torno a la dificultad relativa de los diferentes tipos de sentencia, señalando, por ejemplo, que los problemas representados por sentencias no canónicas, donde lo desconocido está en primer lugar (?+a=b) o en 2º lugar (a+?=b) son más difíciles que los problemas en los que subyace una sentencia canónica, es decir, en los que lo desconocido es el resultado (a+b=?; a-b=?). Rosenthal y Resnick proporcionan un modelo para dar cuenta de estas diferencias en dificultad; está centrado en el proceso de traducir el texto del problema en una ecuación y la dificultad se predice en función del número y del tipo de transformaciones requeridas para traducir la ecuación en su forma canónica para la solución.

Una tercera alternativa considera las características semánticas del problema. La mayor parte de la evidencia disponible sugiere que la estructura semántica de un problema es mucho más importante que la sintaxis en la determinación de los procesos que los niños usan en sus soluciones. Consecuentemente la mayor parte de la investigación reciente sobre problemas verbales se ha centrado en ella (Briars y Larkin, 1.984; Carpenter, Hiebert y Moser, 1.981; Carpenter y Moser, 1.982, 1.983, 1.984, 1.985; Nesher, 1.982; Riley, 1.981; Riley, Greeno y Heller, 1.983; Tamburino, 1.980; Vergnaud, 1.982...), llegándose a adoptar un esquema común para caracterizar los problemas verbales en las dimensiones que parecen ser más productivas para distinguir diferencias relevantes en el modo de resolver los problemas por los niños.

Tipos de problemas

Este análisis propone cuatro extensas clases de problemas de adición y sustracción: Cambio, Combinación, Comparación e Igualación. Los problemas de Cambio y de Igualación describen la adición y la sustracción como **acciones** que causan **aumento** o **disminución** en una determinada cantidad. Las categorías de Combinación y Comparación incluyen **relaciones estáticas** entre las cantidades.

Un aspecto importante a considerar es también el **lugar ocupado por la incógnita**. En los problemas de **Cambio**, lo desconocido puede ser el punto de partida, la magnitud del cambio o el resultado. Teniendo en cuenta al mismo tiempo la dirección del cambio (aumento o disminución), hay seis tipos diferentes de problemas de Cambio.

Los problemas de **Combinación** incluyen las relaciones existentes entre un conjunto y sus dos subconjuntos. Existen, por lo tanto, dos problemas tipo: o bien se dan los dos subconjuntos y se pregunta por el tamaño de su unión, o bien se conoce uno de los subconjuntos y el total y hay que hallar el otro subconjunto.

Los problemas de **Comparación** incluyen la comparación entre dos conjuntos disjuntos: uno puede designarse como conjunto referente y el otro como conjunto de comparación. La tercera entidad en estos problemas es la diferencia entre ambos. Cualquiera de estas tres entidades puede ser desconocida. El conjunto mayor puede ser el referente o el de comparación, por lo que hay seis tipos diferentes de problemas de Comparación.

Los problemas de **Igualación** constituyen un híbrido de problemas de Comparación y de Cambio. Tales problemas no se han encontrado normalmente en la literatura de investigación. Se comparan dos conjuntos separados, preguntando a continuación acerca de lo que hay que hacer para que uno de los dos conjuntos sea igual al otro. Si la acción debe realizarse en el menor de los conjuntos, se trata de Igualación-Añadir; si la acción debe realizarse en el mayor de los conjuntos, se trata de un problema de Igualación-Separar. Según en cual de los tres items de información se halle la incógnita, obtenemos tres problemas de Igualación de cada tipo.

Este sistema de caracterización de los problemas verbales de adición y sustracción se limita a los problemas sencillos apropiados para los niños de primera edad. Ha sido muy útil para clarificar las distinciones entre tipos de problemas y los procesos de solución de los niños reflejan claramente esta distinción (Carpenter y Moser, 1.982, 1.983).

Dificultad relativa

Hay numerosos estudios empíricos sobre la dificultad relativa de problemas semejantes a los que acabamos de indicar. El procedimiento básico consiste en que los niños tienen que resolver determinados problemas que les son leídos por el experimentador, despacio y repitiendo cuantas veces sea necesario (para obviar las dificultades de memoria). El tamaño de los números se restringe (de modo que la suma sea menor de 10) cuando se aplican a niños pequeños, para evitar las dificultades en el conteo. Los principales hallazgos de estos estudios son: que, en general, los niños mayores resuelven los problemas mejor que los pequeños y que la estructura semántica y la identidad de lo desconocido influyen consistentemente en la dificultad relativa del problema (Riley, Greeno y Heller, 1.983).

Por lo que se refiere a la influencia de la estructura semántica, se han encontrado algunos resultados consistentes (Ibarra y Lindvall, 1.979; Nesher y Katriel, 1.977; Riley, 1.981; Tamburino, 1.980; Vergnaud, 1.981):

- los problemas aditivos de Comparación son más difíciles que los problemas de Cambio y Combinación que requieren la misma operación aritmética.

- los problemas sustractivos de Comparación y Combinación son, en general, más difíciles que los problemas sustractivos de Cambio.

Se podría especular que las estructuras semánticas de Cambio, Combinación y Comparación se irían desarrollando progresivamente en el niño (Riley Greeno y Heller, 1.983). Tal hipótesis estaría de acuerdo con la de que el concepto de suma y resta como operación unitaria, que describe la operación como un cambio de estado, (presente en los problemas de Cambio), sería anterior en su adquisición al concepto de suma y resta como operación binaria, que insiste en la idea de una relación estática entre los dos sumandos (propia de los problemas de

Combinación y de Comparación) (Baroody, 1.988; Fuson, 1.982, 1.988; Vergnaud, 1.982; Weaber, 1.982). Baroody (1.988) encuentra, sin embargo, que lo normal "es que los niños asimilen rápidamente los problemas de combinación a su conocimiento aritmético informal y que pronto resuelvan problemas de cambio y combinación con la misma facilidad" (Pag.234)

En cuanto a los problemas de Igualación, pocas veces han sido tenidos en cuenta en una investigación de este tipo. Carpenter, Hiebert y Moser (1.981) aplicaron a niños de 1º grado escolar dos problemas de Igualación en los que la incógnita se encuentra en la diferencia entre la cantidad dada y la deseada (Igualación 1 e Igualación 2) y hallaron que una proporción elevada de niños (.91), los resolvieron correctamente (resultando más fáciles que los de Combinación y Comparación). Sin embargo, para Bermejo y Rodríguez (1.987), los problemas de Igualación resultan más complejos que los de Combinación, tanto para los niños de 2º de Preescolar como para los de 1º de EGB y llegan a afirmar que"los niños preescolares parecen incapaces de construir la representación mental adecuada de la tarea encomendada" (Pag.77).

No obstante, el grado de dificultad de problemas que comparten una misma estructura semántica es diferente en función del lugar ocupado por la incógnita. Por lo que se refiere a los problemas de Cambio, los más fáciles son aquellos en los que se desconoce el resultado, los más difíciles los que presentan la incógnita en el punto de partida, y se encuentran en una posición intermedia aquéllos en los que el dato a averiguar es la cuantía del cambio. También varía la dificultad de los problemas de Combinación y Comparación dependiendo de qué valor del problema es el desconocido: el problema de Combinación en el que se desconoce una parte es más difícil que aquel en el que la incógnita lo constituye el todo y los problemas de Comparación en los que se desconoce el referente son más difíciles que cualquiera de los problemas de Comparación (Riley, Greeno y Heller, 1.983).

Se ha estudiado la incidencia de la **formulación verbal del problema** (orden en que se presenta la información, lexico utilizado, grado de explicitación de las relaciones entre las cantidades...) en su nivel de dificultad (Carpenter, Hiebert y Moser, 1.981; Hudson, 1.980; Lindvall e Ibarra, 1.980...). En general, estos autores llegan a la conclusión de que la modificación del enunciado en el sentido de hacer más claras las relaciones semánticas, sin alterar ni la estructura aritmética ni la estructura semántica, facilita en gran medida su comprensión y solución por los niños. El trabajo de Hudson está ampliamente difundido en la literatura sobre el tema. Planteó a 12 niños de jardín de infancia, 24 preescolares y 28 de 1º grado escolar ocho problemas de Comparación mediante dibujos; por ejemplo, en uno de ellos se hallaban representados 5 pájaros y 4 gusanos. Les formuló dos preguntas bien distintas en la forma; una es la cuestión usual en este tipo de problemas: *¿Cuántos pájaros hay más que gusanos?*. La cuestión alternativa fué la siguiente: *Supón que cada uno de los pájaros trata de coger un gusano. Cogerá cada pájaro un gusano?. ¿Cuántos pájaros se quedarán sin gusano?*. Los resultados fueron sorprendentes. Muy pocos niños pequeños respondieron con la diferencia entre los conjuntos a la primera cuestión; sin embargo, los niños de las tres edades respondieron correctamente a la segunda. En los problemas de Combinación se han obtenido efectos semejantes con el cambio de palabras. Así, Carpenter, Hiebert y Moser (1.981) indican que 33 de 43 niños de 1º grado (77%), resolvieron el problemas de Combinación en el que se desconoce una parte, cuando se les planteó de este modo "Hay 6 niños en el jardín, 4 son niños y **el resto** son niñas. ¿Cuántas niñas hay en el jardín?" (pag.30). En el estudio de Riley (1.981), el problema correspondiente era así: "Joe y Tom tienen 8 canicas entre los dos. Joe tiene 3 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Tom?" (Pag.160) y el porcentaje de niños de 1º grado que encontraron la solución fué notablemente menor (39%). Lindvall e Ibarra (1.980) encontraron que problemas como éste se simplificaban en gran medida cuando se añadían convenientemente determinados términos: "Tom y Joe tienen juntos 8 manzanas. Tres **de éstas** manzanas pertenecen a Tom. ¿Cuántas **de ellas** pertenecen a Joe?" (citado en Riley, Greeno y Heller, 1.983, pag.173). Las dificultades que los niños manifiestan en la forma habitual de presentar el problema parecen deberse, por lo tanto, a una limitación en la capacidad para representar las relaciones entre las cantidades descritas en el mismo de manera que se relacione con un procedimiento de solución ya disponible (Riley, Greeno y Heller). En los problemas reformulados, sin embargo, se destacan las relaciones semánticas, facilitándose su comprensión y resolución.

Numerosos estudios han encontrado que la disponibilidad de **ayudas manipulativas** facilita la solución de los problemas, incluso en 1º grado de escolaridad (Carpenter Hiebert y Moser, 1.981; Ibarra y Lindvall, 1.982; Riley, Greeno y Heller, 1.983; Steffe y Johnson, 1.971...). Sin embargo, también se ha indicado que puede frenar el desarrollo de estrategias, incitando a los niños a utilizar objetos en la resolución de problemas, en lugar de estimular procedimientos más abstractos (Carpenter y Moser, 1.982).

Por último, algunos autores han indicado la importancia que tiene el **tamaño del número** utilizado en el grado de dificultad en los problemas. Los trabajos de Carpenter y otros, utilizan problemas que se plantean en dos tamaños del número: con números pequeños (la suma está entre 5 y 9) y con números grandes (su suma está entre 11 y 16). Encuentran que aparece un 10% más de errores de conteo en los problemas con números altos (Carpenter y Moser, 1.984).

Procesos de solución

En la investigación sobre los procesos que los niños siguen en la solución de problemas verbales de adición y sustracción, se han utilizado tres paradigmas básicos (Carpenter y Moser, 1.983).

El más utilizado en estudios recientes se basa en el **método clínico o por entrevistas** , es decir, en plantear individualmente al niño los problemas y, a través de la observación de su conducta abierta y de preguntas exploratorias, inferir cómo resuelve cada uno de ellos (Carpenter, 1.980; Carpenter, Hiebert y Moser, 1.981; Carpenter y Moser, 1.982, 1.983, 1.984, 1.985; Riley, 1.981...). Hay que tener en cuenta, no obstante, las limitaciones al tipo de inferencias que pueden realizarse a partir de las entrevistas (Carpenter y Moser, 1.983). La más importante es que las explicaciones de los niños pueden no reflejar exactamente los procesos que siguieron para resolverlo. Puede ocurrir que el mismo procedimiento de entrevista cambie el modo de proceder del niño, o que un niño tenga dificultad en expresar el proceso seguido y opte por describir otro más fácil de articular, o también que un niño responda en el sentido solicitado por el experimentador.

Estas limitaciones han llevado a algunos investigadores a utilizar otros procedimientos que no confían en las explicaciones infantiles y que están basados en medidas más objetivas. Una de las técnicas más conocidas consiste en **medir el tiempo de reacción** de un sujeto particular ante un determinado problema (Groen y Parkman, 1.972; Groen y Resnick, 1.977). A partir de modelos hipotéticos sobre el tiempo requerido para resolver diferentes problemas usando estrategias particulares, los investigadores han podido señalar inferencias acerca de los procesos de solución seguidos. Se asume que el tiempo requerido para resolver un problema dado usando una estrategia particular es una función lineal del número de etapas requeridas para alcanzar la solución. Los modelos generalmente están limitados a las estrategias de conteo. Hay una serie de suposiciones cuestionables que subyacen a este paradigma (Carpenter y Moser, 1.983), entre las que cabe destacar dos: que el tiempo requerido para varios escalones es constante para diferente par de números y que los niños usan consistentemente una estrategia para todos los problemas.

Por fin, también se ha utilizado para inferir los procesos de solución de los niños, **el análisis de los errores cometidos** (Briars y Larkin, 1.984; De Corte y Verschaffel, 1.985; Lindvall e Ibarra, 1.980; Riley, Greeno y Heller, 1.983). Determinadas estrategias de solución pueden permitir a los alumnos resolver algunos problemas pero no otros. Se ha intentado inferir los procesos que han podido seguir los niños, a partir del examen de los tipos de error en los distintos grupos de problemas. El mayor inconveniente en este procedimiento consiste en que los errores tienen lugar por otras razones que las identificadas en los modelos de las estrategias generales de los niños.

Como se ve, en realidad todos los procedimientos de evaluación tienen sus limitaciones. "Con todas sus debilidades, las entrevistas individuales proporcionan la medida más directa de los procesos que los niños siguen. Pero la latencia y los errores proporcionan un apoyo valioso" (Carpenter y Moser, 1.983, pag.19). Algunos autores han utilizado conjuntamente las entrevistas y el análisis de latencia (Carpenter y Moser, 1.982; Ginsburg, 1.977; Groen y Parkman, 1.972...). Apenas hay estudios sobre análisis de los errores cometidos por los niños, y tienden a circunscribirse al estudio de algún problema en particular y, en ocasiones, como apoyo para defender un determinado modelo teórico (Riley, Greeno y Heller, 1.983; Briars y Larkin, 1.984).

Los estudios sobre los procesos que siguen los niños al solucionar problemas verbales se han centrado separadamente en la adición y sustracción. Los más mencionados en la literatura son los de Carpenter (Carpenter, Hiebert y Moser, 1.981, Carpenter y Moser, 1.982, 1.983, 1.984, 1.985), que constituyen un punto de referencia esencial. Estos autores, a su vez, reconocen como fuente de sus trabajos sobre las estrategias de conteo, la obra de Groen y Parkman (1.972). Basándonos en tales autores vamos a presentar las principales estrategias de solución que han sido identificadas. La taxonomía que ofrecemos ha sido ampliamente utilizada en la invetigación sobre este tema.

Estrategias de adición

Se han identificado tres niveles básicos en los procedimientos de adición (Carpenter, 1.983):

- estrategias basadas en la utilización de modelos con dedos u objetos físicos.

- estrategias basadas en secuencias de conteo

- estrategias basadas en el recuerdo de datos numéricos

La investigación pone de manifiesto que los niños pequeños emplean estrategias informales que modelan el significado de problemas básicos de adición y sustracción (Baroody, 1.988; Carpenter, Hiebert y Moser, 1.981, Carpenter y Moser, 1.982, 1.983, 1.984, 1.985; Ibarra y Lindvall, 1.982; Lindvall e Ibarra, 1.980; Resnik, 1.983...). En la estrategia más básica se usan objetos o los dedos para representar cada uno de los sumandos y luego se cuenta la unión de los dos conjuntos, comenzando desde el primer elemento (Contar todo con modelos). La estrategia puede acompañarse de distintos modos de organizar los objetos, pero las ordenaciones no parecen representar distintas estrategias o interpretaciones de la adición. Weaver (1.982) describe la posibilidad de un procedimiento algo distinto, que podría representar mejor una concepción unitaria de la adición; consiste en construir un conjunto representando un sumando y luego incrementarlo con el número de elementos dados por el segundo sumando, sin llegar a construir el segundo conjunto. En opinión de Carpenter y Moser, esta estrategia es rara vez usada.

Los niños inventan atajos espontáneamente, como la estrategia de "pautas digitales" (Baroody, 1.988) en la que cada sumando se representa con una pauta digital, de modo que el niño sólo tiene que contar el total, y la estrategia de "reconocimiento de pautas" (Siegler y Robinson, 1.982; Siegler y Shrager, 1.984), en la que se obvia incluso este último conteo, ya que la suma se reconoce también inmediatamente, ya sea de forma visual o cinestésica.

Se han delimitado tres estrategias aditivas de conteo (Groen y Parkman, 1.972; Carpenter, Hiebert y Moser, 1.981; Carpenter y Moser, 1.982, 1.983, 1.984). En la más elemental, la secuencia de conteo comienza por uno y continúa hasta la respuesta buscada; se trata de la estrategia "SUM" de Groen y Parkman (Baroody, 1.984; Baroody y Gannon, 1.984). Esta estrategia, que también es una estrategia de contarlo todo, difiere de la anterior en que no se usan objetos ni dedos para representar los sumandos. Esta estrategia y las dos siguientes requieren algún método para no perder de vista el número de escalones que representa el segundo sumando para saber cuando hay que parar de contar. Difícilmente explican los niños este proceso. Cuando se usan los dedos, su papel es muy diferente al desempeñado en la estrategia anterior; se usan para indicar tan sólo el número de escalones en la secuencia de conteo.

Las otras dos estrategias basadas en la secuencia de conteo son más eficientes y suponen una aplicación menos mecánica del conteo (Ibídem). El mismo niño llega a descubrir que no es necesario reconstruir toda la secuencia (Fuson, 1.982; Resnick y Neches, 1.984). En "Contar desde el primero", la comienza en el primer sumando; la estrategia "Contar desde el mayor" es idéntica excepto que el niño comienza a contar desde la cantidad más elevada; se trata de la estrategia "Min" de Groen y Parkman (1.972). Al parecer, "los niños están motivados por minimizar su esfuerzo cognoscitivo" (Baroody, 1.988, pag.134).

No está claro si, es posible delimitar dos estadios distintos, correspondientes a "Contar desde el primero" y "Contar desde el mayor". Carpenter y Moser (1.984) encontraron que los niños no utilizaban consistentemente la estrategia más eficiente de las que disponían y que ambos procedimientos de conteo se usaron al mismo tiempo. Esto contradice la posición de Briars y Larkin (1.984) al respecto, quienes predicen la siguiente secuencia de estrategias: contar todo, contar desde el primero y, por último, contar desde el mayor y afirman que, una vez alcanzada la estrategia más eficiente, el niño tiende a utilizarla de forma consistente.

Pero las soluciones de los niños a los problemas verbales no se limitan a estrategias de conteo y modelado. En numerosas ocasiones, los niños resuelven problemas sencillos recordando combinaciones numéricas, o utilizando un pequeño conjunto de datos memorizados para sacar la solución de problemas que incluyen otras combinaciones numéricas.

La primera estrategia que los niños utilizan para resolver problemas aditivos es la de "Contar todo con modelos". Su uso va declinando progresivamente al mismo tiempo que aumenta el de las estrategias de conteo y el uso de datos numéricos (Carpenter y Moser, 1.982).

Los niños parecen tener un concepto unificado de adición, es decir, sus procedimientos no reflejan las diferentes nociones de suma implicadas en los distintos problemas aditivos (Carpenter y Moser, 1.983). Así, los datos hallados por estos autores confirman que los niños tratan los problemas de Cambio-Juntar y de Combinación, como si fueran equivalentes: no sólo encuentran los mismos procedimientos, sino que aparece el mismo patrón de respuestas para los dos.

Estrategias de sustracción

Cada uno de los tres niveles de abstracción delimitados en las estrategias de adición se dan también en la solución de los problemas de sustracción (Carpenter y Moser, 1.982, 1.983, 1.984). Sin embargo, como hacen notar estos mismos autores, mientras que en adición aparece sólo una interpretación básica, en sustracción se dan cuatro estrategias fundamentales dentro de las de modelado y de las de conteo:

- "Separar desde": el niño construye el conjunto correspondiente a la cantidad mayor, retira de él, uno a uno, un número de elementos igual a la cantidad menor y da como resultado el valor del conjunto que queda.

- "Contar hacia abajo desde" es su paralela en el conteo. Consiste en contar hacia atrás a partir de la cantidad mayor, bajando un número de escalones igual a la cantidad menor.

- "Separar hasta": es semejante a "Separar desde", con la diferencia que aquí se retira el número de objetos necesario para obtener la cantidad menor dada en el problema. La respuesta se obtiene contando el número de elementos sustraidos.

- "Contar hacia abajo hasta": la secuencia de conteo hacia atrás, a partir de la cantidad mayor, continúa hasta alcanzar el dato menor que aparece en el problema. Contando los numerales emitidos, se obtiene la respuesta.

- "Añadir a": Incluye una acción aditiva. El niño comienza con la cantidad menor y construye la mayor con objetos concretos. El número de objetos añadidos es la respuesta.

- "Contar hacia arriba": es la estrategia de conteo paralela a la anterior. El niño comienza la secuencia de conteo hacia adelante comenzando con el menor número dado, y terminando con el mayor. La cantidad de numerales emitidos en la misma, constituye la solución.

- "Emparejar": No tiene su paralela en el conteo. El niño construye dos conjuntos de objetos representando las dos cantidades del problema y los sitúa en correspondencia uno a uno. Para hallar la solución, cuenta el número de objetos desparejados.

- "Elección": Consiste en elegir entre una secuencia de conteo hacia arriba o hacia abajo, en función de su eficacia en cada caso (la que supone un menor número de pasos)

A estas estrategias hay que añadir las correspondientes al uso de datos numéricos memorizados y derivados, indicadas en el caso de la adición. Las explicaciones de los niños en sus soluciones sugieren que las combinaciones numéricas que recuerdan son a menudo de adición (Carpenter y Moser, 1.983).

Del mismo modo que en el caso de los problemas aditivos, los niños empiezan utilizando estrategias de modelado con objetos y posteriormente cambian a estrategias más abstractas. A diferencia de la adición, aparece una gran variabilidad de estrategias. Los resultados indican que el factor fundamental en la determinación de estrategias es la estructura del problema, de modo que los niños tienden a representar la acción o relación descrita en el problema. Esta tendencia es especialmente marcada en los niños por debajo de 2º grado.

(Carpenter, Hiebert y Moser, 1.981; Carpenter y Moser, 1.982, 1.983, 1.984, 1.985). Según estos mismos autores, el análisis de la dificultad relativa de los diferentes tipos de problemas verbales indica que los problemas que no pueden ser modelados fácilmente, son significativamente más difíciles que aquéllos que sí pueden serlo. El tamaño de los números utilizados en los problemas no parece condicionar el tipo de procedimientos empleados; su efecto se circunscribe al nivel de dificultad (Carpenter, 1.984).

Errores

Los datos recientes acerca de los errores que los niños cometen en la resolución de problemas verbales de adición y sustracción son menos numerosos.

Carpenter, Hiebert y Moser (1.981) señalan que el error más común hallado en su estudio con niños de 1º grado, antes de recibir instrucción formal en aritmética, consistió en responder con uno de los números dados en el problema, apareciendo sobre todo en el de Combinación (desconocida una parte). En muy pocas ocasiones apareció una operación equivocada. En opinión de estos autores, el confundir la operación adecuada se observa sobre todo en niños mayores, con experiencia en instrucción formal de adición y sustracción.

Briars y Larkin (1.984) ejemplifican algunos errores en determinados problemas como apoyo al modelo teórico elaborado por ellos, indicando que aparecen cuando el niño no tiene el conocimiento que se requiere para resolverlos. Así, por ejemplo, en el problema de Combinación (desconocida una parte), si no se conoce el lenguaje de conjuntos, se interpretan las dos cantidades dadas en el problema como correspondientes a dos conjuntos distintos. Cuando se cuestiona acerca de la parte desconocida, la respuesta es uno de los datos del problema. En el problema de Comparación en el que se desconoce la diferencia, si no se comprende el lenguaje comparativo, se crea un conjunto para cada cantidad dada en el problema. Cuando se pregunta por la diferencia ("¿Cuántas canicas tiene más Mary que Sue?"), la respuesta es el número de canicas en el conjunto de Mary (dato del problema). En los problemas comparativos en los que se añaden señales lingüísticas conflictivas los autores predicen dos tipos de error: dar un dato del problema, reflejando la falta de conocimiento del lenguaje comparativo, o confundir la operación idónea, respondiendo consistentemente con la señal lingüística; entre los pequeños el error más frecuente será el primero, mientras que para los mayores será el segundo.

Riley, Greeno y Heller (1.983), en su análisis de los diferentes niveles de habilidad para resolver problemas, destacan que las dificultades de los niños radican, ante todo, en una incapacidad para representar la información del problema. Así, por ejemplo, indican que en el problema de Cambio-Juntar, en el que se desconoce la magnitud del cambio, la dificultad surge al no distinguir el niño el conjunto inicial y el conjunto cambio en la representación final. Esto le lleva a dar como respuesta la cuantía del conjunto total (dato del problema). Un error de este mismo tipo tendrá lugar en los problemas de comienzo desconocido, cuando los niños no sean capaces de una representación anticipada del problema antes de resolverlo: atribuirán la cantidad del cambio al punto de partida.

El estudio de De Corte y Verschaffel (1.985) viene a confirmar que la principal dificultad que presentan los niños al comienzo de 1º grado se encuentra en un estadio del proceso de solución que precede a la selección de la operación aritmética: en la fase de construcción de una representación mental del problema que refleja la correcta comprensión del enunciado. Además de los fallos causados por dificultades en el proceso semántico, encuentran otros derivados de la falta de familiaridad con este tipo de tareas y las reglas de juego correspondientes, es decir, de un déficit en el desarrollo de lo que ellos denominan "esquema de problema verbal" (WPS).

Progreso en la resolución de problemas de adición y sustracción

Los niños entran en la escuela con un importante desarrollo de la aritmética informal (Fuson y Hall, 1.983; Gelman y Gallistel, 1.978; Ginsburg, 1.977...). Gran parte de la investigación en este área ha estudiado cómo usan los niños este conocimiento informal en la resolución de problemas (Carpenter, Hiebert y Moser, 1.981, Carpenter y Moser 1.982, 1.983, 1.984; Riley, Greeno y Heller, 1.983...). Antes de recibir instrucción formal en adición y sustracción, la mayor parte de los niños inventa estrategias de modelado y conteo para resolver problemas básicos de suma y resta (Ibídem). Los procedimientos informales de solución tienen una clara relación con la estructura semántica de los problemas, aparecen ligados al conocimiento conceptual de los niños, es decir, a la representación que se hacen del problema.

Sin embargo, el conocimiento conceptual sobre el que los procedimientos de los niños pequeños se basan es limitado, y, en consecuencia, a tales procedimientos les falta flexibilidad (Carpenter, 1.986): los niños sólo pueden representar y resolver problemas modelando directamente, paso a paso, la acción o las relaciones descritas en el problema.

El desarrollo hacia niveles más avanzados en la solución de problemas está caracterizado por un **aumento en flexibilidad**. En opinión de **Carpenter** (1.986, pag.115), "este aumento en flexibilidad se hace posible gracias a una creciente base conceptual, procedimientos más eficientes y el mantenimiento de las relaciones entre ambos. Está impulsado por una red cada vez más extensa de relaciones entre problemas". Según este mismo autor, la flexibilidad se manifiesta tanto en la elección de procedimientos para resolver problemas, como en la naturaleza de las estrategias elegidas: los niños van haciéndose más flexibles en la elección de procedimientos para solucionar distinto tipo de problemas y las mismas estrategias se hacen más flexibles. De este modo, llega un momento en que los niños no están limitados a procedimientos que se ajustan estrechamente a la estructura del problema. Pueden usar una variedad de procedimientos para resolver el mismo problema (pudiendo elegir en cada caso la más eficiente) y pueden resolver problemas que no son fácilmente modelados. Es decir, "tienen una red de relaciones entre problemas y estrategias mejor integrada, que hace posible un concepto unificado de sustracción y adición más que un conjunto desparramado de problemas y procedimientos" (Ibídem). Al mismo tiempo que los niños ganan flexibilidad en la elección de estrategias, los mismos procedimientos van haciéndose más flexibles: así, por ejemplo, el conteo desde el primer sumando supone un avance significativo en la flexibilidad del conteo.

Carpenter (1.984) ha identificado cinco niveles en la realización de los niños al resolver problemas verbales: En el más elemental (nivel 0), los niños son incapaces de resolver ningún problema de adición y sustracción. En el nivel siguiente (nivel 1), están limitados a las estrategias de modelado con objetos. El nivel 2 marca un periodo transicional, ya que los niños utilizan estrategias de modelado y de conteo. En el nivel 3, confían principalmente en estrategias de conteo, y en el más elevado (nivel 4), los niños resuelven los problemas de adición y sustracción utilizando datos numéricos.

Resnick (1.983) ha descrito tres amplios periodos en el desarrollo de los conceptos numéricos, que se reflejan asimismo en la resolución de problemas por el niño:

En la etapa preescolar, la mayor parte de los niños han construido una representación del número que puede ser caracterizada como una "línea numérica mental". Esta línea numérica puede usarse para establecer cantidades por operaciones de conteo y para comparar directamente cantidades. De este modo, los niños pueden solucionar una considerable cantidad de problemas aritméticos, usando el conteo, sobre todo hacia adelante, y en la medida en que tienen objetos manipulables para apoyarse en el cálculo.

El avance más importante que tiene lugar al comienzo de la escolaridad es, para este autor la interpretación de los números en términos de las relaciones parte-todo. "Con la aplicación del esquema Parte-todo para la cantidad, se hace posible a los niños pensar acerca de los números como formando parte de otros números. Este enriquecimiento de la comprensión del número permite formas de problemas aritméticos e interpretaciones que no están al alcance de los más pequeños" (como los problemas de comienzo desconocido) (Pag.114). El esquema parte-todo parece jugar un papel importante en la invención de procedimientos de conteo mental que se desarrollan en este momento.

El desarrollo del conocimiento numérico decimal -que marca el tercero de los periodos indicados-, es considerado por la autora como resultado de "una elaboración progresiva del esquema Parte-todo para los números, de modo que éstos llegan a interpretarse por los niños como compuestos por decenas y unidades y se ven como objeto de especiales reagrupamientos bajo el control del esquema Parte-todo" (Pag.126). Esto, a su vez, lleva consigo la invención de procedimientos de cálculo mental más elaborados, permitiendo, por ejemplo, la utilización de datos derivados que dependen del conocimiento de los complementos de las decenas (por ejemplo, 6+7=6+4 , más 3).

El esquema Parte-todo desempeña también un papel importante en el desarrollo de la habilidad de resolver problemas aritméticos de enunciado verbal, según los dos principales modelos teóricos que se han elaborado al respecto: el de Riley, Greeno y Heller y el de Briars y Larkin.

Riley, Greeno y Heller (1.983) han desarrollado un modelo de simulación del conocimiento requerido para resolver problemas verbales de adición y sustracción, que caracteriza el desarrollo en términos de avances basados ampliamente en el conocimiento conceptual.

Distinguen tres tipos principales de conocimiento en la solución de problemas: "esquema del problema" (para comprender las variadas relaciones semánticas); "esquema de acción" (para representar el conocimiento acerca de acciones implicadas en las soluciones del problema) y "conocimiento estratégico (para planificar la solución). Las dificultades de los niños en resolver algunos problemas pueden deberse a la ausencia de uno o más de estos componentes de conocimiento.

A partir de los patrones de respuestas correctas y de los errores cometidos en los problemas, realizan un análisis de diferentes niveles en la capacidad de los niños para resolver problemas, en el que se asume que "el factor más importante es la adquisición de una habilidad creciente para representar la información del problema" (Pag.170). Los niveles difieren asimismo en los modos de manipular la información cuantitativa, de manera que los más avanzados se caracterizan por representaciones más elaboradas y por procedimientos más sofisticados.

En el primer nivel los niños están limitados a representaciones externas de los problemas utilizando objetos físicos. Pueden resolver sólo los que pueden ser modelados paso a paso. Sin embargo, son incapaces de resolver problemas como el siguiente: "Joe tenía 3 canicas. Luego Tom le dió algunas canicas más. Ahora Joe tiene 8 canicas. ¿Cuántas canicas le dió Tom?" (Cambio-Juntar. Desconocida la cuantia del cambio). La dificultad no está en llevar a cabo los procesos correctos de resolución del problema, sino en la representación del problema. Cuando los niños intentan modelarlo, parten del primer conjunto (3), van añadiendo objetos hasta conseguir el segundo (8). Pero fallan debido a la falta de habilidad para representar separadamente los conjuntos del comienzo y del cambio, de modo que cuando se les pide el número de canicas que fueron añadidas, la cuestión es simplemente interpretada como un requerimiento para determinar el número total de canicas y responden incorrectamente "8".

La principal diferencia entre los niveles 1 y 2 es que en el 2 se representa internamente información adicional acerca de la situación del problema. Se mantiene el recuerdo del papel estructural de cada item de información. Esta información estructural adicional permite dar contestación correcta a los problemas de Cambio-Juntar (Cambio desconocido) donde se fallaba en el nivel 1. La conducta ahora con respecto a este problema, comienza siendo idéntica a la del nivel anterior : se cuentan 3 bloques y se representa esto como un conjunto perteneciente a Joe y con un valor 3. Luego se intenta poner bloques adicionales pero, al no mencionarse ninguna cantidad, no se realiza ninguna acción. Hasta este punto la comprensión del problema en los dos niveles es idéntica.

La diferencia aparece en la respuesta a la siguiente sentencia ("Ahora Joe tiene 8 canicas"). Además de incrementar el conjunto existente hasta un total de 8 bloques, en el nivel 2 se identifica el conjunto de 8 como el conjunto resultado obtenido al incrementar el conjunto inicial de 3 bloques, con una cantidad desconocida. Cuando se pregunta "¿Cuántas canicas dió Tom a Joe?", es posible identificar el conjunto de cambio separado en la representación del problema y determinar la cuantia del conjunto contando a partir de los 3 bloques.

Aunque en el nivel 2 se ha alcanzado una representación interna más completa que en el nivel 1, todavía le falta una habilidad importante para el procesamiento de arriba a abajo en su representación de la información del problema. Esto se aprecia en la incapacidad para resolver los problemas con comienzo desconocido y varios tipos de problemas de comparación.

El conocimiento conceptual de los niños acerca de los elementos y relaciones en los problemas verbales, también parece relacionarse con la adquisición de procedimientos de conteo más sofisticados. Los autores atribuyen al nivel 2 un procedimiento de conteo que permite contar comenzando con el valor del conjunto ya existente si se conoce. Así, si se tienen ya tres bloques pero se necesitan 8, es posible empezar a contar con 3 y simplemente añadir bloques hasta alcanzar 8, en vez de recontar los tres como se hace en el nivel 1.

El nivel 3 incluye un esquema para representar las relaciones parte-todo que permite a los niños proceder en dirección de arriba a abajo para construir una representación de las relaciones entre todas las unidades de información en el problema antes de resolverlo. Esto les libera de tenerse que basar en soluciones que representan directamente la acción en el problema, de modo que pueden resolver todo tipo de problemas de adición y sustracción, utilizando cualquier estrategia adecuada. La acción o relaciones en un problema se analizan en términos de si el problema dado incluye las dos partes que forman el todo o el todo y una de las partes. Esto permite a los niños repartir los diferentes tipos de problemas en dos grandes clases de problemas equivalentes, que pueden ser resueltos utilizando los mismos procedimientos.

El conocimiento conceptual de los niños puede también relacionarse con la adquisición de un procedimiento de conteo "Min" (Groen y Resnick, 1.977) en el que el número que se añade pasa de ser el segundo sumando a ser el más pequeño de los dos. La propiedad matemática que permite este procedimiento más eficiente es la conmutatividad, que, en opinión de Riley, Greeno y Resnick, corresponde a una comprensión implícita de las relaciones parte-todo entre los sumandos a y b y su suma c.

Fuson (1.979) propone la misma idea básica señalando que la relación conmutativa entre a y b puede diferenciarse con el tipo de problema. La conmutatividad podría parecer menos obvia cuando los papeles desempeñados por los dos números difieren (como en los problemas de Cambio) que cuando los papeles coinciden (como en los problemas de Combinación). Es decir, aunque el carácter secuencial de los problemas aditivos de Cambio puede facilitar la transición de contarlo todo al conteo, puede hacer la conmutatividad menos aparente. Fuson sugiere que la transición al procedimiento más eficiente "Min" podría ser facilitado en el contexto de Combinación más que en el de Cambio.

En esencia, el desarrollo del nivel 1 al nivel 3 -interpreta Carpenter (1.986)- está caracterizado por una capacidad cada vez más compleja para representar relaciones en y entre problemas. La transición del nivel 1 al nivel 2 se caracteriza por el crecimiento de la habilidad para representar relaciones dentro de los problemas. La transición al nivel 3 está marcada por la habilidad para representar problemas de tal modo que se comprendan las relaciones entre diferentes tipos de problemas.. Así, el desarrollo de procesos más avanzados en la solución de problemas depende de un mayor desarrollo del conocimiento conceptual.

Briars y Larkin (1.984) han diseñado un modelo alternativo del desarrollo de las habilidades de solución de problemas. Tratan de explicar las dificultades relativas de los problemas basándose en una descripción de los procesos psicológicos del niño, que representan a través de un modelo de ordenador al que denominan CHIPS ("concrete human-like inferential problem solver"). El modelo resuelve muchos problemas verbales elementales simulando con representaciones de contadores físicos (chips). Los problemas más difíciles requieren aumentar este procedimiento primero, con conocimiento de que un objeto es un miembro de dos conjuntos al mismo tiempo (contadores de "doble rol"), así es posible la solución a problemas como el de Cambio-Juntar-Desconocido el cambio, y, segundo, con conocimiento de que los procesos pueden volver al punto de partida y de que los subconjuntos pueden ser intercambiados (reversibilidad y conmutatividad), lo que posibilita la solución de problemas con comienzo desconocido. Tanto los "contadores de doble rol" como la representación de los problemas gracias a la "inversión en el tiempo" y a la "equivalencia de subconjuntos", reflejan un salto conceptual importante.

CHIPS tiene tres niveles distintos de conocimiento matemático:

- El primero incluye sólo la habilidad de mover y contar fichas. Una ficha es una entidad simple que nunca es miembro de más de un conjunto al mismo tiempo. La única estrategia de conteo que CHIPS puede ejecutar es la de contar todo el conjunto desde el primer elemento.

- En el segundo nivel CHIPS adquiere la habilidad de usar una ficha al mismo tiempo como miembro de dos conjuntos. Esta representación hace posible la utilización de la estrategia "Contar desde el primer sumando"

- En el tercer nivel CHIPS adquiere la habilidad de almacenar información acerca de una secuencia bien en un esquema de transferencia o de equivalencia de subconjuntos. Si el problema no puede resolverse por modelado directo con contadores de doble papel, entonces CHIPS puede usar la información en uno de esos esquemas bien para poner en marcha el problema al revés para determinar un conjunto inicial desconocido, bien para invertir los papeles de dos subconjuntos equivalentes. El conocimiento de la equivalencia de subconjuntos hace posible la estrategia de "Contar desde el sumando mayor". Cuando el niño tiene dos o más estrategias disponibles, CHIPS utilizará la que resulta en un menor número de pasos y/o evita un procedimiento difícil (como el de contar hacia atrás).

El modelo predice dos fuentes independientes de dificultad en los problemas:

- En igualdad de condiciones la proporción de éxito de los niños en la solución de un problema dependerá de los requerimientos matemáticos para su solución: si puede hacerse con contadores de un sólo rol o si requiere contadores de doble rol o un cambio en la representación

- Un problema con señales directas de acción que CHIPS puede imitar será más fácil que un problema que no tenga tales señales. Los problemas sin señales de acción (como los de Combinación y Comparación) deben ser reinterpretados de modo que se puedan resolver formando y contando montones apropiados de fichas. Muchos problemas de relación de conjuntos tienen una fuerte señal de acción con una palabra que indica el conjunto de orden superior ("en total"...).

En adición CHIPS hace, además, predicciones acerca de determinados errores en los niños que tratan de solucionar problemas con un conocimiento insuficiente para resolverlos .

A pesar de las diferencias en la formalización de los modelos, destacadas por Briars y Larkin (1.984, pags 287-288), estos autores y Riley, Greeno y Heller coinciden en numerosos hechos esenciales. Los modelos proponen los mismos niveles básicos y **el desarrollo a través**

de ellos está caracterizado por importantes avances en conocimiento conceptual y en procedimientos relacionados con tal conocimiento. Para las dos teorías resulta fundamental en la solución de los problemas más difíciles (de comienzo desconocido), la representación de acuerdo con el esquema parte-todo o de equivalencia de subconjuntos. Coinciden además en sostener que:

- en el nivel más bajo, los niños pueden resolver los problemas de Juntar y Separar, pero no el de Juntar con el sumando desconocido;

- la solución de este problema tiene lugar en el segundo nivel, al mismo tiempo que la utilización de la estrategia "Contar desde el primer sumando" y

- el procedimiento "Contar desde el primer sumando" se adquiere en un nivel anterior que el de "Contar desde el mayor".

Algunas investigaciones han tratado de verificar estos modelos empíricamente. Para Carpenter (1.986) y Carpenter y Moser (1.984) las asumciones de tales modelos no están garantizadas. Estos autores ponen en cuestión si modelos tan específicos pueden dar cuenta de la variabilidad de la realización de los niños. Opinan que la conducta de los niños no es tan ordenada como se sugiere en los mismos y que, por otra parte, no se tienen en cuenta diferencias sistemáticas en la ejecución de los niños según el tipo de problema, como, por ejemplo, que los niños abandonan las estrategias de modelado directo antes en unos problemas que en otros. Además encuentran evidencia empírica contraria a la asumción de que la habilidad para resolver problemas de Juntar con el sumando desconocido se desarrolla al mismo tiempo que la habilidad para el conteo. Carpenter y Moser (1.984) aportan datos que indican cómo los niños son capaces de resolver este tipo de problemas antes de ser capaces de utilizar un procedimiento de conteo.

Es necesario que la investigación siga poniendo a prueba las asumciones que subyacen a los dos principales modelos teóricos elaborados sobre la resolución de problemas verbales de adición y sustracción. La cuestión de cuáles son los progresos en conocimiento conceptual que explican el avance de los niños en la solución de problemas se considera, todavía hoy, una cuestión abierta.

Pero todavía es preciso tener en cuenta una nueva perspectiva al explicar los progresos en la habilidad para resolver problemas de adición y sustracción. Frente a los modelos descritos, Baroody y Ginsburg (1.986) defienden que el desarrollo de los procedimientos de solución no está siempre gobernado por el desarrollo del conocimiento conceptual, de modo que no se puede inferir, a partir de determinadas estrategias utilizadas por el niño, que éste ha adquirido los conceptos subyacentes a las mismas. Para ellos, la elaboración de procedimientos más avanzados está impulsada tanto por el intento de reducir las demandas de procedimiento cognitivo, como por la adquisición del conocimiento conceptual que está en la base. De este modo, la aplicación de ciertos procedimientos puede conducir al conocimiento conceptual, a medida que los niños reflexionan sobre su acción y captan regularidades en la aplicación de los mismos, en lugar de ocurrir siempre y de forma obligada, el camino contrario. Esto les lleva a afirmar que la relación entre un tipo y otro de conocimiento es muy compleja y que, en numerosas ocasiones, **los avances en conocimiento conceptual no son ni necesarios ni suficientes para dar cuenta de los progresos en el conocimiento procesual.** Así, por ejemplo, los niños pueden desatender el orden de los sumandos en problemas de adición y al mismo tiempo sostener que dos problemas con los sumandos conmutados tendrán soluciones distintas y pueden usar el procedimiento de "Contar desde el mayor" sin comprender el principio de conmutatividad. En esta misma línea de pensamiento se encuentra el análisis efectuado por Resnick (1.983), quien sugiere que la habilidad de procedimiento a menudo precede a la comprensión. Así, por ejemplo, -nos dice-, los niños aprenden la estructura decimal del sistema numérico a través de lo que debe ser, al principio, repetición, apenas sin sentido, de las cadenas de conteo...

La cuestión es, por lo tanto, muy compleja y el problema fundamental podría radicar en qué realización puede tomarse como evidencia de que un niño ha adquirido un determinado elemento de conocimiento conceptual (Carpenter, 1.986). Está claro que los niños que no reconocen que a + b = b + a, no tienen una comprensión completa de la propiedad conmutativa, pero pueden tener alguna comprensión inicial del efecto del orden de los sumandos que les permite invertir el orden de los mismos en la solución de determinados problemas, sin ser capaces todavía de usarla como principio para comparar sumas. Con esto volvemos de nuevo al tema planteado anteriormente a propósito de las relaciones entre los conceptos piagetianos y la resolución de tareas aritméticas (Resnick, 1.983; Pennington, Wallach y Wallach, 1.980).

De este modo, los avances en las habilidades de procedimiento pueden estar basados en conocimiento conceptual, como afirman Briars y Larkin (1.984), Carpenter (1.986), Riley, Greeno y Heller (1.983), pero las conexiones entre un tipo y otro de conocimiento podrían establecerse gradualmente y por partes, mostrándose menos coherencia en la aplicación del conocimiento conceptual de lo que proponen los modelos teóricos comentados. "El conocimiento conceptual -afirma Carpenter (1.986)- no se integra de forma inmediata con todos los procedimientos con los que se relaciona; antes bien, inicialmente, se aplica de forma local a problemas y procedimientos particulares" (Pag. 120).

El tema de las relaciones entre conocimiento conceptual y conocimiento de procedimientos es, como puede observarse, central en la investigación sobre el aprendizaje de las matemáticas y está abierto a la investigación, constituyendo el punto de mira de gran parte de los trabajos actuales sobre el mismo (Baroody y Ginsburg, 1.986; Carpenter, 1.986; Carpenter y Moser, 1.984; Gelman y Gallistel, 1.978; Hiebert y Lefevre, 1.986; Resnick, 1.983; Sinclair y Sinclair, 1.986...).

Sea cual sea la postura adoptada por los distintos autores, todos ellos **coinciden en reconocer que se da una profunda interrelación entre ambos tipos de conocimiento**, que el progreso en la resolución de problemas se caracteriza por procedimientos más avanzados y un conocimiento conceptual más elaborado y en defender que es preciso tener en cuenta ambos desarrollos para comprender los procesos de solución de los niños y para planificar la instrucción de tal modo que fomente la relación entre conocimiento conceptual y de procedimientos. Los dos tipos de conocimiento son importantes.

Sin embargo, la enseñanza de las matemáticas parece poner el énfasis en el conocimiento procesual, lo que a menudo resulta en un conocimiento conceptual pobre y apenas relacionado con el conocimiento de procedimientos, lo que acaba angostando también a este último.

Mientras que los procedimientos espontáneos seguidos por los niños en la solución de problemas expresan su conocimiento conceptual, podría ser un error asumir que el procedimiento enseñado refleja el mismo conocimiento (Carpenter, 1.986). El enseñarles procedimientos más avanzados, en sí mismos, no asegura que los niños hayan adquirido el conocimiento conceptual correspondiente. De este modo, la enseñanza podría llevar en algunos casos a una separación entre ambos tipos de conocimiento. Seguramente está aquí la razón de la paradoja que describe Hughes (1.987, pag.56): "Si se hubiese descubierto que los niños poseían muy escasas capacidades en el momento de comenzar su escolaridad, quizá fuesen más lógicas sus posteriores dificultades con respecto a la matemática escolar. En cambio topamos con una paradoja: al parecer los niños pequeños empiezan su escolaridad con más conocimientos matemáticos de lo que hasta ahora se había creído. Si esto es así, ¿por qué experimentan tales dificultades en relación con la matemática escolar?"

En efecto, en los años preescolares, los procedimientos utilizados por los niños "están generados de nuevo para cada problema, atendiendo a la estructura semántica" (Carpenter, 1.986, pag.). Parece que entre los pequeños, conocimiento conceptual y conocimiento procesual están estrechamente relacionados (Hiebert y Lefevre, 1.986), de manera que llegan a ser indisociables (Sinclair y Sinclair, 1.986), informando continuamente el uno al otro.

La enseñanza de las matemáticas introduce a los niños en el lenguaje simbólico formal. "Si los alumnos conectan los símbolos con sus referentes basados conceptualmente, los signos adquieren significado y llegan a ser poderosas herramientas. Desafortunadamente muchos estudiantes parecen aprender símbolos como marcas en el papel sin sentido. Los símbolos se separan del conocimiento conceptual que representan" (Hiebert y Lefevre, 1.986, pag. 20). En efecto, para muchos niños, la iniciación en el aprendizaje formal de la aritmética supone la separación de las dos clases de conocimiento, la ruptura de su interacción.

En los años siguientes, los niños van acumulando gran cantidad de reglas de manipulación de símbolos, siendo más sensibles a las características sintácticas que a la base conceptual (Hiebert y Lefevre, 1.986). Incluso si el conocimiento conceptual existe, tiene escaso efecto en la selección y ejecución de los procedimientos (Resnick, 1.982). Los alumnos basan su confianza casi exclusivamente en conocimiento procesual, pero los procedimientos no vinculados con conocimiento conceptual puede deteriorarse rápidamente...(Hiebert y Lefevre, 1.986).

Se hace preciso un cambio sustancial en la enseñanza de las matemáticas escolares de modo que se favorezca un aprendizaje con comprensión; incluso en la adquisición de datos numéricos y algoritmos, "es importante que el conocimiento conceptual esté disponible de tal forma que uno pueda volver a él para determinar si o cómo un particular algoritmo se aplica a una nueva situación" (Carpenter, 1.986, pag.).

Pero este cambio en la enseñanza requiere gran cantidad de trabajo empírico y teórico para clarificar las cuestiones todavía oscuras y cuyo conocimiento es esencial para la planificación educativa:

- En primer lugar, para planificar la educación de la aritmética escolar es preciso comprender, a pequeña escala, cuáles son los conocimientos matemáticos con los que los niños llegan a la escuela, el tipo de procedimientos que utilizan y la naturaleza de sus errores. Sólo de este modo conseguiremos que el nuevo lenguaje matemático tenga significado para ellos y llegue a convertirse en una herramienta útil para su razonamiento matemático posterior. La importancia que tiene el conocimiento informal de los niños en los aprendizajes formales y, por lo tanto, la necesidad de partir de él en la enseñanza escolar ha sido reconocida de forma general (Baroody y Ginsburg, 1.986; Carpenter, 1.986; Davydov, 1.982; Hiebert y Lefevre, 1.986; Hughes, 1.987; Riley, Greeno y Heller, 1.983...). Ahora bien, a pesar de los numerosos estudios efectuados sobre el tema, los resultados obtenidos hasta la fecha no se consideran como definitivos. Es preciso un minucioso análisis, guiado por las principales investigaciones realizadas, de cuál es el punto de partida en el proceso de instrucción de las matemáticas escolares.

- Por otra parte, es necesario analizar muy detalladamente el desarrollo en la habilidad de resolver problemas una vez iniciada la instrucción formal, la evolución de las estrategias empleadas, el modo cómo tiene lugar el paso de unos procedimientos a otros, qué es lo que motiva la elección de una estrategia particular, qué tipo de dificultades encuentran los niños algo mayores en su resolución y a qué podemos atribuirlas.... e inferir el tipo de representación conceptual que los niños se hacen a lo largo de los distintos cursos. ¿Se verifican las asunciones de los principales modelos teóricos?. ¿Se confirman los resultados de las más destacadas investigaciones en este campo?.

- ¿ Qué diferencias presentan los niños de un mismo curso en la adquisición de los conceptos y habilidades de adición y sustracción?. ¿Cuál es la influencia de las diferencias individuales?. Se trata de una cuestión muy relevante en el terreno educativo y que no ha sido seriamente examinada por la investigación reciente (Carpenter, 1.983).

- ¿Cómo influye la utilización de palabras específicas en el enunciado del problema, en su resolución por el niño?. Según Carpenter y Moser (1.983, pag.38), con respecto a este tema "permanece algo de caja negra en la mayor parte de la investigación y teoría actual".

- ¿Cuáles son los efectos de la instrucción?. La enseñanza actual de las matemáticas, ¿está favoreciendo un avance en el razonamiento implicado en la resolución de problemas o éste parece tener lugar al margen (no nos atrevemos a decir "a pesar de") la escolarización?. Hughes (1.987) ha sugerido, en relación con la comprensión del simbolismo matemático que "la capacidad implicada parece relativamente independiente de la etapa a la que hayan llegado los niños dentro del plan de estudios de matemáticas" (pag.141). ¿Se verifica esto en el ámbito de solución de problemas?. ¿Qué ocurre si comparamos la realización de niños preescolares con un buen nivel de rendimiento según la valoración del profesor con la de los niños de EGB de bajo nivel no sólo en porcentaje de éxito, sino también en estrategias empleadas y en tipos de error?.

- ¿Cómo tiene lugar la transición de las estrategias informales de modelado y de conteo que los niños parecen inventar por sí mismos (Carpenter, 1.983...) a los algoritmos formales y datos numéricos memorizados que los niños aprenden en la escuela?.

- Sobre la base de los resultados obtenidos cabe plantearse si los problemas verbales de adición y sustracción pueden constituir un medio para introducir las operaciones aritméticas básicas en lugar de utilizarlos como aplicación de las mismas una vez adquiridas. ¿Qué tipo de consecuencias podrían seguir a este cambio en la didáctica del primer aprendizaje matemático?.

- ¿Cuál podria ser la progresión más adecuada en la resolución de problemas por los niños?. O, dicho de otra forma, ¿qué tipo de problemas van resultando accesibles a lo largo de los distintos cursos?. ¿cuáles son los prerrequisitos cognitivos para resolver las distintas modalidades?. ¿Cuál de los modelos teóricos parece ajustarse mejor a los datos empíricos?.

- ¿Se justifica la separación existente entre enseñanza de la adición y sustracción?. ¿En base a qué?. ¿Qué consecuencias parecen derivarse?.

- En el terreno más práctico, ¿cómo podrían conectarse los procedimientos formales que enseña la escuela con los que ya utiliza de forma espontánea el niño?. Carpenter (1.986) sugiere que en la primera instrucción en aritmética, deben elegirse con sumo cuidado el tipo de sentencias numéricas y operaciones modeladas en ellas de manera que sean consistentes con el conocimiento conceptual de los niños. ¿Cuáles son las bases específicas sobre las que hemos de realizar tal selección?.

Se hace asimismo urgente la investigación sobre el modo cómo utilizar el conocimiento acumulado sobre la adquisición de los conceptos y habilidades de adición y sustracción para diseñar la instrucción de las matemáticas elementales.

Nuestra tesis queda enmarcada dentro de este planteamiento general e intenta ser una aportación al esclarecimiento de algunas de las cuestiones señaladas y, dado que en España esta materia resulta todavía relativamente novedosa, trata de cofirmar para nuestro país los principales estudios realizados sobre el tema.

Referencias bibliográficas

BAROODY, A. J. (1.987): The development of counting strategies for single digit addition. Journal for Research in Mathematics Education, 2, 141-157.

BAROODY, A. J. (1.988): El pensamiento matemático de los niños. Aprendizaje visor y Centro de publicaciones del MEC. Madrid.

BAROODY, A. J. - GINSBURG, H.P.(1.986): The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. En J. HIEBERT (Ed.): Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, pags 75-112.

BAROODY, A. J.- GANNON, K.(1.984): The development of the commutativity principle and economical addition strategies. Cognition and Instruction, 1, 321-339.

BERMEJO, V.- RODRIGUEZ, P. (1.987): Fundamentos cognitivos de la adición. Psiquis 103,Vol. VIII, pags. 21-29.

BRIARS, D. J. - LARKIN, J. H. (1.984): An integrated model of skills in solving elementary word problems. Cognition and Instruction, 1, 245-296.

BUSWELL, G.T.-JUDD, C.H. (1.925): Summary of educational investigations relating to arithmetic. Supplementary Educational Monogrsphs, Nº 27. University of Chicago Press. Chicago.

CARPENTER, T. P. (1.980): Heuristic strategies used to solve addition and subtraction problems. En Proceedings of the Fourth International Congress for the Psichology of Mathematics Education. Berkeley.

CARPENTER, T. P. (1.986): Conceptual knowledge: Implications from research on the initial learning of arithmetic. En J. Hiebert (ed.): Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics, 113-132. Lawrence Erlbaum Associates. Hillsdale, Nueva Jersey.

CARPENTER, T. P. - HIEBERT, J. - MOSER, J. M. (1.981): Problem structure and first-grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. Journal for Research in Mathematics Education, 12, 27-39.

CARPENTER, T. P. -BLUME, G. - HIEBERT, J. - ANICK, C. M. - PIMM, D. (1.982): A review of research on addition and subtraction. Working paper nº 330. Wisconsin Center for Education Research. Madison.

CARPENTER, T.P. - MOSER, J. M. (1.983): Acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (eds.) : Acquisition of mathematic on concepts and processes. Academic Press. Nueva York.

CARPENTER, T.P. - MOSER, J.M. (1.982): The development of addition and subtraction problem - solving skills. En T. P. Carpenter - J. M. Moser y T.A. Romberg (Eds.): Addition and Subtraction: a cognitive perspective. Erlbaum. Hillsdale, New Jersey.

CARPENTER, T.P. - MOSER, J.M. (1.984): The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one trough three. Journal of Research in Mathematics Education, 15, 179 - 202.

CLEMENTS, D.H. (1.984): Training effects on the development and generalization of Piagetian logical operations and knowledge of number. Journal of Educational Psychology, 76, 766-776.

COOPER, R. - STARKEY, P. - BLEVINS, B. - GOTH, P. - LEITNER, E. (1.978): Number development: Addition and subtraction. Paper presented at the symposium of the J. Piaget Society. Philadelphia.

DAVYDOV, V.V. (1.982): The Psychological Characteristics of the Formation of Elementary Mathematical Operations in Children. En T.P.Carpenter-J.M. Moser-T.A.Romberg (Eds.): Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey.

DE CORTE, E.- VERSCHAFFEL, L.(1.985): Beginning first graders'initial representation of arithetic word problems. The Journal of Mathematical Behavior 4, 3-21.

DONALDSON, M.(1.984): La mente de los niños. Morata, Madrid. (Public. orig. 1.978).

FLAVELL, J.H. (1.984): El desarrollo cognitivo. Aprendizaje visor. Madrid.

FUSON, K.C. (1.982): An analysis of the counting-on solution procedure in addition. En T. P. Carpenter - J. M. Moser - T.A. Romberg (Eds.); Addition and subtraction: a cognitive perspective. Erlbaum. Hillsdale, New Jersey.

FUSON, K.C. (1.988): Children's counting and concepts of number. Springer-Verlag. Nueva York.

FUSON, K.C. - HALL, J.M. (1.983): The acquisition of early number word meanings: A conceptual analysis and review. En H. Ginsburg (Ed.): The development of mathematical thinking. Academic Press. Nueva York.

GELMAN, R. (1.972): Logical capacity of very young children: Number invariance rules. Child Development, 43, 75-90. 1.972.

GELMAN, R. (1.982): Basic number abilities. En R.J. Sternberg (ed.): Advances in the Psychology of Human Intelligence, vol. 1. Erlbaum. Hillsdale.

GELMAN, R. - MECK, E. (1.986): The notion of principle: The case of counting. En J. Hiebert (ed.) Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. Lawrence Erlbaum Associates.Hillsdale, N.J.

GELMAN, R.- GALLISTEL, C.R. (1.978): The child understanding of number. Harvard University Press. Cambridge, Massachusetts.

GELMAN, R.- MECK, E. (1.983): Preschoolers counting: Principles before skill. Cognition, 13, 343-359.

GINSBURG, H.(Ed.) (1.982): The development of mathematical thinking. Academic Press. Nueva York.

GINSBURG, H.P. (1.977): Children's Arithmetic: The learning process. Van Nostrand. Nueva York.

GROEN, G. - KIERAN, C. (1.983): In search of Piagetian mathematics. En H. P. Ginsburg (Ed.): The development of mathematical thinking. pp. 351-375. Academic Press. Nueva York

GROEN, G. - RESNICK, L.B. (1.977): Can preschool children invent addition algorithms? Journal of Educational Psychology, 69, pp. 645-652. Diciembre.

GROEN, G.J. - PARKMAN, J.M. (1.972): A chronometric analysis of simple addition.Psychological Review, 79, 329-343.

GROWS, D.A. (1.972): Open sentences: Some instructional considerations from research. The Arithmetic Teacher, 19, 595-599.

HIEBERT, J. - CARPENTER, T.P. (1.982): Piagetian tasks as readiness measures in mathematics instruction: A critical review. Educational studies in Mathematics, 13, 329-345.

HIEBERT, J.- LEFEVRE, P. (1.986): Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. En J. Hiebert (Ed.): Conceptual and Procedural Knowledge: The case of Mathematics. Lawrence Erlbaum Associates. Hillsdale, N.J.

HUDSON, T. (1.980): Young children's difficulty with "How many more...than...are there" questions (doctoral disertation). Dissertation Abstracts International, Indiana University, nº 1. Julio.

HUGHES, M. (1.987): Los niños y los números. Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Nueva Paideia. Planeta. Barcelona. (Public. orig. 1.986).

IBARRA, C.G. - LINDVALL, C.M. (1.982): Factors associated with the ability of kindergarten children to solve simple arithmetic story problems.Journal of Educational Research, 75, 149-155.

IBARRA, C.G.- LINDVALL, C.M. (1.979, abril): An investigation of factors associated with children's comprehension of simple story problems involving addition and subtraction prior to formal instruction on these operations. The Annual Meeting of the National Council of Teachers of Mathematics. Boston.

JERMAN, M. (1.973-1.974): Problem length as a structural variable in verbal arithmetic problems. Educational Studies in Mathematics, 5, 109-123.

JERMAN, M.-REES, R. (1.972): Predicting the relative difficulty of verbal arithmetic problems. Educational Studies in Mathematics, 4 (3), 306-326.

KAMII, C.: El número en la educación preescolar. Aprendizaje Visor. Madrid, 1.984. (Public. orig. 1.982).

KAMII, C.K. (1.986): El niño reinventa la aritmética. Implicaciones de la teoría de Piaget. Aprendizaje Visor. Madrid. (Public. orig. 1.985).

KLAHR, D.- WALLACE, J.G. (1.976): Cognitive development: An information-processing view. Halstead Press. New York.

LESH, R. - LANDAU, M. (1.983): Acquisition of mathematic on concepts and processes. Academic Press. Nueva York.

LINDVALL, C.M. - IBARRA, C.G. (1.980): The development of problem-solving capabilities in kindergarten and first grade children. Comunicación presentada en el encuentro anual del National Council of Teachers of Matematics. Seattle, abril.

LOFTUS, E.J.F. (1.970): An analysis of the structural variables that determine problem solving difficulty on a computer-based teletype (Tech.Rep.Nº162). Stanford: Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences.

LOFTUS, E.J.F.-SUPPES, P. (1.972): Structural variables that determine problem solving difficulty in computer-assisted instruction. Journal of Educational Psychology, 63(6), 531-542.

NESHER, P. (1.982): Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems. En Carpenter, T.P.-Moser,J.M.-Romberg T.A. (eds.): Addition and subtraction: A cognitive perspective. Erlbaum. Hillsdale, New Jersey.

NESHER, P. - KATRIEL, T. (1.977): A semantic analysis of addition and subtraction word problems in arithmetic. Educational Studies in Mathematics, 8, 251-269.

PENNINGTON, B.F.- WALLACH, L.- WALLACH, M.A. (1.980): Non conserver's use and understanding of number and arithmetic. Genetic Psychology Monographs, 101, 231-243.

PIAGET, J. - SZEMINSKA, A. (1.975): Génesis del número en el niño. Guadalupe, Buenos Aires. (Public. orig. 1.941).

RESNICK, L.B. (1.982): Syntax and semantics in learning to subtract. En T.P. Carpenter-J.M. Moser- T. Romberg (eds.): Addition and Subtraction. A Cognitive Perspective. Lawrence Erlbaum Associates. Hillsdale, N.J.

RESNICK, L.B. (1.983): A developmental theory of number understanding. En H. Ginsburg (ed.): The development of mathematical thinking. Academic Press, 109-151. Nueva York.

RESNICK, L.B.-NECHES,R. (1.984): Factors affecting individual differences in learning ability. En R. Sternberg (Ed.): Advances in the psychology of human intelligence (Vol.2, pags.275-323). Lawrence Erlbaum. Hillsdale, N.J.

RILEY, M.S. (1.981): Conceptual and procedural knowledge in development. Tesis doctoral sin publicar. University of Pittsburgh.

RILEY, M.S.- GREENO,J.G.- HELLER, J.I. (1.982): Development of children's problem-solving ability in arithmetic. En H. Ginsburg (ed.): The development of mathematical thinking. Academic Press. Nueva York.

ROSENTHAL, D.J.A.- RESNICK, L.B. (1.974): Children's solution processes in arithmetic word problems. Journal of Educational Psychology, 66, 817-825.

RUSSELL, B.(1.917): Introduction to mathematical philosophy. George, Allen and Unwin. Londres.

SIEGLER, R.S. - ROBINSON, M. (1.982): The Developmental of Numerical Understanding. En H.W. Reese-L.P. Lipsitt (eds.): Advances in Child Developmental and Behavior, vol. 16. Academic Press. Nueva York.

SIEGLER, R.S. - SHRAGER, J. (1.984): Strategy choices in addition: How do children know what to do?. En C. Sophian (ed.): Origins of cognitive skills. 229-293. Lawrence Erlbaum Associates. Hillsdale. New Jersey.

SINCLAIR, H. - SINCLAIR, A. (1.986): Children's mastery of written numerals and the construction of basic number concepts. En J. Hiebert (ed.): Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. Lawrence Erlbaum Associates. Hillsdale. New Jersey

SMEDSLUND, J. (1.966): Microanalysis of concrete reasoning, I. The difficulty of some combinations of addition and subtraction of one unit. Scandinavian Journal of Psychology, 7, 145-156.

STARKEY, P. (1.978): Number development in young children: conservation, addition and subtraction.Tesis doctoral. Universidad de Texas. Austin.

STARKEY, P. - GELMAN, R. (1.982): The development of addition and subtraction abilities prior to formal schooling in arithmetic. En Carpenter, T.P.-Moser, J.M.-Romberg, T.A.(eds.): Addition and subtraction: A cognitive perspective. Erlbaum. Hillssdale. New Jersey.

STARKEY, P.-COOPER, R.G. (1.980): Perception of number by human infants. Science, 210, 1.033-1.035.

STEFFE, L.P. - JOHNSON, D.C. (1.971): Problem-solving performances of first-grade children. Journal for Research in Mathematics Education, 2, 50-64.

SUPPES, P.- LOFTUS, E.F.- JERMAN, M. (1.969): Problem solving on a computer- based teletype. Educational Studies in Mathematics, 2, 1-15.

TAMBURINO, J.L. (1.980): An analysis of the modelling processes used by kindergarten children in solving simple addition and subtraction story problems. Tesis doctoral sin publicar. University of Pittsburgh.

THORNDIKE, E.L. (1.922): The psychology of arithmetic. Macmillan. Nueva York.

VERGNAUD, G. (1.981): A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En Carpenter, T.P.-Moser, J.M.-

Romberg, T.A. (eds.): Addition and Subtraction: A cognitive perspective. Erlbaum. Hillsdale, New Jersey.

VERGNAUD, G. (1.982): Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: some theoretical and methodological issues. For the Learning of Mathematics, 3, 31-41. 1.982

WEAVER, J.F. (1.982): Interpretations of number operations and symbolic representations of addition and subtraction. En Carpenter, T.P.-Moser, J.M.- Romberg (eds.): Addition and subtraction: A cognitive perspective. Erlbaum. Hillsdale, New Jersey.

3. OBJETIVOS DEL ESTUDIO

El objetivo general de esta investigación consiste en conocer los conceptos matemáticos espontáneos de los niños y las estrategias que siguen en la solución de problemas matemáticos elementales, antes de recibir instrucción formal, asi como el desarrollo que tiene lugar durante los dos primeros años de escolaridad, delimitando y tratando de explicar las principales dificultades con las que se encuentran. Es decir, se intenta analizar el pensamiento matemático de los niños en el momento de transición entre 1º de Preescolar y 2º de EGB, por considerarlo critico en el proceso del aprendizaje escolar de las matemáticas. El estudio va encaminado a aportar algún conocimiento sobre las bases para una didáctica de las matemáticas en Preescolar y primer ciclo de EGB.

Este objetivo general puede concretarse en los siguientes:

1.- Determinar la incidencia de la estructura semántica, posición de la incógnita, contexto lingüístico y tamaño de los números utilizados, en el nivel de dificultad de los problemas planteados.

2.- Elaborar una clasificación general de los problemas según el nivel de dificultad, tanto en el conjunto de la muestra como en cada uno de los cursos.

3.- Analizar los progresos realizados por los alumnos en la resolución de problemas, a medida que avanzan en su escolaridad, indicando el momento en que se consigue el dominio de cada tipo de problema.

4.- Constatar la variabilidad intracurso en la habilidad para resolver problemas, tratando de delimitar aquéllos que resultan más discriminativos de los alumnos de alto y bajo nivel de rendimiento, en cada grado escolar.

5.- Relacionar la habilidad de resolver problemas con el desarrollo de las nociones piagetianas de Conservación, Inclusión y Seriación, para verificar si éstas constituyen un prerrequisito para aquélla.

6.- Relacionar la habilidad de resolver problemas con el conocimiento de las propiedades básicas de la aritmética.

7.- Identificar las estrategias utilizadas por los niños de distinto curso y de distinto nivel de rendimiento en la resolución de las diversas clases de problemas verbales de adición y sustracción, intentando especificar los principales determinantes de su elección en cada caso, asi como su tendencia evolutiva.

8.- Comprobar si el conocimiento de la propiedad conmutativa de la suma introduce algún tipo de cambio en las estrategias de conteo utilizadas en los problemas de adición.

9.- Analizar las dificultades y los errores cometidos por los niños de distinto curso y de distinto nivel de rendimiento al solucionar los problemas aritméticos planteados, tratando de buscar una explicación de los mismos.

10.- Comparar la capacidad de resolver problemas, los procedimientos de solución seguidos y el tipo de error cometido por los alumnos de educación preescolar de rendimiento alto y por los alumnos de EGB de rendimiento bajo, como medio para comprobar en qué medida el progreso depende de la escolaridad.

11.- Comprobar si la etapa cognitiva de los niños, valorada a través de las pruebas piagetianas, influye en el tipo de estrategias utilizadas y/o en la naturaleza de los errores cometidos.

4. METODOLOGIA

El estudio que realizamos es esencialmente cualitativo ya que no sólo pretendemos averiguar qué problemas pueden resolver los niños, sino también cómo los resuelven y dónde se encuentran las dificultades y errores.

La metodología básica ha consistido en entrevistas clínicas practicadas, individualmente, a un grupo reducido de niños de preescolar y primer ciclo de E.G.B., en las que se les van presentando las distintas tareas que tienen que resolver. A través de la observación de la conducta abierta de los niños y de las preguntas que les formulamos, tratamos de aclarar sus conceptos básicos matemáticos, los procesos que siguen al tratar de solucionar las cuestiones planteadas, así como el tipo de obstáculos que encuentran en su resolución.

En la presentación de cada una de las tareas, tratamos de asegurarnos la comprensión del niño, dando, en cada caso, las explicaciones necesarias. De este modo, las instrucciones no siempre son iguales para conseguir una equivalencia subjetiva.

Cada niño ha sido entrevistado en cuatro o cinco sesiones realizadas en días consecutivos y las entrevistas han sido grabadas íntegramente en vídeo para ser posteriormente analizadas de un modo cualitativo. Los datos se recogen de una forma descriptiva, formando un dossier para cada uno de los alumnos, y luego se categorizan y se presentan a través de tablas. Sobre ellos se aplica un reducido número de estadísticos.

Los resultados obtenidos se discuten en relación con la fundamentación teórica, tratando de obtener conclusiones relevantes para la pedagogía de las matemáticas en preescolar y ciclo inicial de la E.G.B.

4.1. MUESTRA

La muestra está formada por 48 niños distribuidos del siguiente modo :

- 12 niños de 4-5 años, de 1º de Preescolar
- 12 niños de 5-6 años , de 2º de Preescolar
- 12 niños de 6-7 años , de 1º de E.G.B.
- 12 niños de 7-8 años , de 2º de E.G.B.

La investigación se ha realizado en dos Colegios Nacionales de Zaragoza, de semejantes características socioculturales: Hispanidad y Andresa Recarte, repartiéndose por igual los alumnos de cada curso escolar. Los sujetos de la muestra se han seleccionado según su nivel de rendimiento académico valorado por el profesor, de modo que participan en cada grupo de edad, 4 alumnos de nivel alto, 4 de nivel medio y 4 de nivel bajo.

4.2. TAREAS PRESENTADAS

Pruebas piagetianas :

En un primer momento se aplicaron a todos los niños las pruebas clásicas de conservación del número, de seriación y de inclusión de clases, y, de este modo, se trató de ubicarles en uno de los niveles evolutivos descritos por Piaget .

- **Prueba de conservación del número** : Se utilizan fichas de dos colores distintos. El experimentador extiende una fila de aprox. 8 fichas y pide al niño que coloque el mismo número de las suyas. Se registra la respuesta del niño . Si es necesario, se colocan las fichas de una y otra

BIBLIOTECA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

fila en correspondencia uno a uno, y se pregunta al niño si hay o no la misma cantidad .

A continuación, se modifica la disposición delante del niño , espaciando o juntando las fichas de una de las filas. Se le plantean entonces las siguientes preguntas: "¿Hay el mismo número de fichas en las dos filas? o ¿hay más aquí? o ¿más aquí?. ¿Cómo lo sabes?".

Si el niño ha dado una respuesta correcta de conservación , se le presenta una contrasugerencia : "Mira lo larga que es esa fila . Otro niño dijo que había más fichas porque es una fila más larga . ¿Quién tiene razón ese niño o tú? .

Si la contestación del niño ha sido incorrecta, se recuerda la igualdad de partida: "¿Pero no te acuerdas de que antes pusimos las fichas de una fila enfrente de las fichas de la otra fila?. Otro niño dijo que ahora había el mismo número en una y otra. ¿Quién crees que tiene razón?".

Se pide al niño que cuente las fichas de una fila y mientras se esconde la otra, se le pide que anticipe el número de fichas que tendrá : "¿Cuántas fichas crees que tendrá la fila que tengo tapada?. ¿Puedes adivinarlo sin contarlas?. ¿Cómo lo sabes?.

De todos modos conviene tener en cuenta que no es posible seguir un procedimiento estandarizado, sino que cada entrevista se adapta a cada niño en concreto.

- **Prueba de seriación** : Se presentan al niño diez varillas que se diferencian en su longitud. Las diferencias entre las distintas varillas son muy pequeñas (1/2 cm. en cada una), de tal manera que no se pueden ordenar mirándolas simplemente. Al niño se le pide que forme una escalera con ellas. Si es necesario se hace una demostración de lo que se pide en la tarea. Se registra y se hace una valoración de las respuestas de los niños .

- **Prueba de inclusión de clases** : Se presenta al sujeto una serie de objetos que pueden dividirse en dos subclases: por ejemplo, piruletas de fresa y de limón (en el caso de los preescolares), o fichas de color rojo y verde (en el de los de EGB). Se centra la atención del niño en la clase total y en las dos subclases que la constituyen, haciendo ver que cada una de éstas no es sino una parte de la totalidad. A continuación se plantean al niño cuestiones como éstas: "¿Qué hay más, piruletas o piruletas de fresa?" o "¿qué hay más, fichas o fichas rojas?". Como en el caso de las anteriores pruebas, se hace una valoración de las respuestas infantiles de acuerdo con los niveles evolutivos establecidos por Piaget .

Tareas para comprobar la comprensión de los principios básicos de las operaciones aritméticas de adición y sustracción:

- **Prueba sobre la inferencia de la operación realizada**: Basada en la tarea mágica de Gelman y Gallistel (1.978). Se deja delante del niño un determinado número de fichas (unas cuatro). Se le pide que cierre los ojos para no ver la transformación: "Cierra los ojos porque no puedes ver lo que yo hago. Después tendrás que descubrirlo". Se van añadiendo o quitando fichas y modificamos la estructura del conjunto de objetos; tras cada intervención nuestra, hacemos que mire de nuevo encima de su mesa y que nos cuente lo que ha sucedido .

- **Prueba sobre la ley aritmética de la inversión** : Esta prueba y la siguiente (sobre la ley de la compensación), se basan en las utilizadas por Starkey y Gelman (1.982). Se presenta un recipiente lleno de canicas en un número indeterminado. Al niño no se le permite contarlas. Se añaden delante de él dos canicas (por ejemplo). A continuación se quitan también dos. Se le pregunta si ahora tenemos más, menos o igual que antes y por qué lo sabe. Se repite la operación añadiendo y quitando el mismo número de canicas y preguntando cada vez por su cantidad relativa (inversión simple). Después se quita un número distinto de canicas del que se ha añadido y se le vuelven a plantear las mismas cuestiones ("inversión incompleta").

Seguidamente se hacen las mismas comprobaciones pero alineando fichas encima de la mesa, de modo que intervengan señales espaciales erróneas para analizar si éstas influyen en las respuestas de los niños

- **Prueba sobre la ley aritmética de la compensación** : Se presentan al niño dos recipientes cerrados con el mismo número de canicas. Se desconoce la cantidad de canicas que hay en los recipientes y se impide al niño contar. Se le dice : "Aquí tenemos dos cajas con el mismo número de canicas. En ésta voy a quitar dos canicas: ¿qué tenemos que hacer ahora si queremos que las dos cajas tengan el mismo número? ¿y qué otra cosa podemos hacer?".

"Ahora voy a quitar 3 canicas de esta caja y también 3 de esta otra. ¿Tenemos el mismo número de canicas en las dos cajas ? o ¿hay más en una de ellas? ¿en cuál? ¿por qué?" (tarea de "compensación simple")

"Si añado 4 en esta caja y 3 en esta otra . ¿Sigue habiendo el mismo número de canicas en las dos cajas? ¿o dónde hay más? ¿por qué?".

Se realizan estas mismas tareas pero partiendo de un número desigual de canicas en los dos recipientes y conociendo el niño su diferencia ("compensación imcompleta"). A las dos cajas se les añade o se les quita el mismo o distinto número de canicas y se vuelven a plantear al niño las mismas cuestiones .

Las tareas se repiten utilizando fichas alineadas en dos filas paralelas para que intervengan señales espaciales erróneas y poder observar su importancia en las contestaciones infantiles .

El nivel de dificultad de esta tarea se va ajustando a cada caso concreto, haciéndola cada vez más compleja a medida que el niño va respondiendo adecuadamente, para comprobar hasta dónde llega su comprensión.

- **Prueba sobre la propiedad asociativa** : Se utiliza la tarea en la que el todo se divide en dos partes , descrita por Piaget y Szeminska (1.975) destinada a comprobar si el niño conoce que una totalidad permanece constante independientemente de varias composiciones de sus partes. Como en las tareas de conservación del número, los conjuntos en este experimento contienen señales espaciales erróneas.

La tarea del niño consiste en juzgar si 8 objetos divididos en dos grupos de 4 es numéricamente igual que 8 objetos divididos en un grupo de 7 y un grupo de 1 objeto. Se le dice que hoy le vamos a dar cuatro caramelos para desayunar y otros cuatro para la merienda. El experimentador sigue diciendo que al dia siguiente tendrá uno sólo por la mañana y siete por la tarde. Se colocan fichas delante del niño, representando en dos filas los caramelos que se le dan por la mañana y por la tarde cada uno de los dos dias, tal como se indica en la figura 1 :

O O O O	O
O O O O	O O O O O O O

Disposición de las fichas para preguntar si 4+4 es lo mismo que 7+1 .

Se repite luego la tarea presentando un tercer dia con una nueva distribución de los caramelos. La pregunta que entonces se plantea al niño es si tendrá el mismo número de caramelos cada uno de los dias. Al final se pide la realización de otras distribuciones que mantengan el total de caramelos para cada dia.

- **Prueba sobre la propiedad conmutativa** : Se plantean al niño unos problemas sencillos de suma utilizando material manipulable (fichas o bloques). Por ejemplo: "Si tienes cinco caramelos y yo te doy tres, ¿cuántos tendrás?". Inmediatamente se presenta el mismo problema pero invirtiendo el orden de los sumandos: "Y si tienes tres caramelos y yo te doy cinco?: ¿cómo lo has averiguado?". Se tiene en cuenta la conducta del niño, la latencia de respuesta y la explicación que el propio niño nos da acerca del proceso seguido para hallar la solución .

<u>Problemas verbales de suma y resta</u> :

Hemos presentado a los niños en días sucesivos un total de diecisiete tipos distintos de problemas, siguiendo la clasificación que hacen P. Carpenter y J.M. Moser (1.982), atendiendo a la estructura semántica de los mismos y que corresponde al esquema común adoptado por numerosos investigadores sobre el tema (Briars y Larkin, 1.984; Carpenter, Hiebert y Moser, 1.981; Carpenter y Moser, 1.982, 1.983, 1.984; Ibarra y Lindvall, 1.982; Lindvall e Ibarra, 1.980; Riley, Greeno y Heller, 1.983; Tamburino, 1.980...). Tal esquema propone cuatro extensas clases de problemas de adición y sustracción, a las que hemos hecho referencia en el "Estado de la cuestión" : Cambio, Combinación, Comparación e Igualación.

Cada tipo de problema fué presentado bajo dos condiciones diferentes teniendo en cuenta la variable "tamaño del número", que incluía dos conjuntos de números: para el conjunto de "números pequeños", su suma se encuentra entre 5 y 9, y para el conjunto de "números grandes" la suma está entre 11 y 16. Sin embargo, no a todos los sujetos se les aplicaron los problemas en las dos condiciones

A los niños de preescolar se les planteó los problemas con números pequeños y en caso de resolverlos correctamente, se les volvía a plantear utilizando números grandes, siempre que hubiera alguna expectativa de éxito.

En cambio, con los niños de EGB procedimos a la inversa: se les presentó de inicio la forma que incluye números grandes y cuando no eran capaces de resolverlos o sospechábamos que la respuesta había tenido lugar al azar, se pasaba a aplicar los problemas correspondientes con números pequeños.

Es decir, la aplicación de los problemas no se realizó de una forma rígida, sino eligiendo en cada caso la forma que parecía más adecuada y adaptando las explicaciones a cada niño para conseguir su comprensión

Todos los niños tenian a su disposición en todo momento ayudas manipulativas (fichas y papel y lápiz) que podian utilizar siempre que quisieran.

Los problemas se presentaron en la entrevista individual verbalmente y por escrito, cada uno en una tarjeta. A los niños se les pedia que los resolvieran como ellos quisieran : "Puedes hacer lo que tú quieras : números, palitos, dibujos, operaciones, puedes también utilizar tus dedos o estas fichas... como te sea más fácil. Lo importante es que encuentres la solución".

En la tabla 4.2.1 se hace una relación de los problemas planteados con números pequeños y en la tabla 4.2.2 se incluyen los correspondientes utilizando números grandes.

En cada una de las tareas presentadas, tras la respuesta proporcionada por el niño, se le interrogó acerca del procedimiento utilizado para hallar la solución, pidiéndole que explicara por qué actuó de ese modo, cómo sabia que así se encontraba la respuesta correcta, si era posible resolverla de otro modo... cómo le enseñaria su solución a un niño más pequeño... Todas estas cuestiones estaban encaminadas a clarificar el modo de pensar del niño, sus ideas implícitas, forma de proceder, obstáculos encontrados..., siendo muy conscientes de las limitaciones que tienen estas inferencias, pero también de su valor en un estudio cualitativo.

Tabla 4.2.1 : Tipos de problemas verbales (números pequeños)

Problemas de Cambio-Juntar

1.-Juan tenía 3 ptas. Su padre le da 5 ptas, ¿cuántas tiene ahora?

3.- Marta tiene 2 lápices. ¿Cuántos le faltan para tener 7?

5.- Isabel tenía una caja con canicas. Ganó 5 canicas más. Ahora tiene en total 7 canicas. ¿Cuántas tenía al principio?.

Problemas de Cambio-Separar

2.-Inés tenía 6 caramelos. Dió 2 a su hermana.¿Cuántos le quedan?.

4.- Inés tenía 6 caramelos. Se le perdieron algunos. Ahora le quedan 4. ¿Cuántos perdió?.

6.- Guillermo tenía una caja con cromos. Se le perdieron 3 cromos. Ahora le quedan 2. ¿Cuántos tenía al principio en la caja?.

Problemas de Combinación

1.- Andrés tiene 3 donuts de azúcar y 4 donuts de chocolate. ¿Cuántos donuts tiene en total?

2.- Hay 6 niños en el jardín. Cuatro son chicos y lo demás son chicas. ¿Cuántas chicas hay en el jardín?

Problemas de Comparación

1.- Jaime tiene 3 globos. Su hermano Juan tiene 5 globos. ¿Cuántos globos más tiene Juan que Jaime?

2.-Luis ha pescado 3 peces. Jorge ha pescado 2 peces más que Luis. ¿Cuántos peces ha pescado Jorge?

3.-Luis ha pescado 6 peces. Luis ha pescado 2 peces más que Carla. ¿Cuántos peces ha pescado Carla?.

Problemas de Igualar-Añadiendo

1.-En el coche se han montado 2 niños y 4 niñas. ¿Cuántos niños se tienen quemontar para que haya el mismo número de niños que de niñas?

3.-Había 3 gallos en el corral y después se han metido 2 más. Ahora hay el mismonúmero de gallos que de gallinas. ¿Cuántas gallinas hay en el jardín?.

5.-Carmen tiene 7 cromos. Si Juan se compra 2 cromos, tendrá el mismo número de cromos que Carmen. ¿Cuántos cromos tiene Juan?.

Problemas de Igualar-Quitando

2.-Hay 3 tazas y 7 platos en la mesa. ¿Cuántos platos tengo que quitar para tener el mismo número de tazas que de platos?

4.-En la mesa hay varios tenedores. Quito 4 para que haya el mismo número de tenedores que de cuchillos. Hay 3 cuchillos en la mesa. ¿Cuántos tenedores había al principio?.

6.-Hay 8 vasos en la mesa. Quito 3 para que haya el mismo número de vasos que de platos. ¿Cuántos platos había en la mesa?.

Tabla 4.2.2 : Tipos de problemas verbales (números grandes).

Problemas de Cambio-Juntar

1.- Jaime tenía 8 canicas. Un amigo suyo le dió 6. ¿Cuántas tiene ahora?.

3.- Miguel tiene 5 canicas. ¿Cuántas necesita para tener en total 13 canicas?.

5.- José tenía una caja con canicas. Luego ganó 8 canicas. Ahora tiene 12 canicas.¿Cuántas tenía al principio?.

Problemas de Cambio-Separar

2.- Francisco tenía 11 piruletas. Dió 7 a su hermana.¿Cuántas le quedan?.

4.- Francisco tenía 11 piruletas. Perdió algunas. Ahora le quedan 4 piruletas. ¿Cuántas perdió?.

6.- Pablo tenía una bolsa con caramelos. Dió 7 caramelos a su hermano. Ahora le quedan 4 caramelos. ¿Cuántos caramelos tenía al principio?.

Problemas de Combinación

1.- En un jarrón hay 6 margaritas amarillas y 9 margaritas blancas. ¿Cuántas margaritas hay en el jarrón?.

2.- Cecilia tiene 14 flores : 8 son rojas y las demás son amarillas. ¿Cuántas flores amarillas tiene Cecilia?.

Problemas de Comparación :

1.- Hay 6 chicos y 11 chicas en el jardín. ¿Cuántas chicas hay más que chicos en el jardín?.

2-Pedro tiene 7 libros de cuentos. Jaime tiene 9 libros más que Pedro. ¿Cuántos libros de cuentos tiene Jaime?.

3.- Luis ha pescado 16 peces. Luis ha pescado 9 peces más que Carla. ¿Cuántos peces ha pescado Carla?.

Problemas de Igualar-Añadiendo

1.-En la terraza hay 6 niños y 8 niñas. ¿Cuántos niños tienen que ir a la terraza para que haya el mismo número de niños que de niñas?.

3.-Había 9 chicos en el jardín y después han ido 7 chicos más. Ahora hay en el jardín el mismo número de chicos que de niñas. ¿Cuántas niñas hay en el jardín?.

5.-María tiene 14 chiclés. Si Cristina se compra 6 chiclés, tendrá el mismo número de chiclés que María. ¿Cuántos chiclés tiene ahora Cristina?.

Problemas de Igualar-Quitando:

2.-Hay 7 tazas y 11 platos en la mesa. ¿Cuántos platos tengo que quitar para tener el mismo número de tazas que de platos?.

4.-Hay un montón de tenedores en la mesa. Quito 4 para que haya el mismo número de tenedores que de cuchillos. Hay 12 cuchillos en la mesa. ¿Cuántos tenedores había al principio?.

6.-Hay 16 vasos en la mesa. Quito 4 para que haya el mismo número de vasos que de platos.¿Cuántos platos había en la mesa?.

Encuesta sobre la suma :

Hemos formulado además una serie de preguntas a los niños en torno a su conocimiento de la operación aritmética, con el objeto de contrastarlo con su ejecución en los problemas aditivos. La encuesta está basada en la efectuada por G. Sastre (1.983, pag. 68):

- ¿Puedes decirme qué es la suma?
- Haz una suma .
- ¿Para qué sirve la suma? . ¿Por qué haces sumas? .
- ¿Es importante saber hacer sumas? .
- ¿Cuando haces sumas?. Si el niño se limita a enumerar actividades de clase le preguntamos: ¿Sólo haces sumas cuando estás en el colegio?. ¿Las sumas que haces en casa cómo son? .
- ¿Lo que hemos hecho con los bloques se parece en algo a una suma?
- ¿Cuando coges cuatro caramelos y luego vuelves a coger tres más, lo que estás haciendo se parece en algo a una suma o no se parece en nada?.

Hemos obtenido, además, información acerca del modo cómo los niños representan gráficamente la cantidad y las operaciones de suma y resta en un contexto de juego, y acerca de la comprensión infantil del simbolismo matemático, adaptando tareas reseñadas por Hughes (1.987). Sin embargo, al no haber utilizado estos últimos datos en la presente investigación, obviamos la descripción de las mismas.

4.3. VALORACION DE LAS PRUEBAS APLICADAS

Tareas de Piaget

En la valoración de las pruebas piagetianas hemos distinguido, siguiendo la obra de Piaget y Szeminska (1.975), las tres etapas descritas en el desarrollo de cada una de estas nociones, clasificando las respuestas infantiles de acuerdo con ellas :

Conservación del número:

Etapa 1 : Ausencia de conservación. El niño no puede hacer una colección de fichas que tenga la misma cantidad que la del modelo, ni puede conservar la igualdad entre ambas colecciones. El juicio numérico de los niños está totalmente dominado por la longitud relativa de las dos filas, sin tener al mismo tiempo en cuenta la densidad de las mismas.

Etapa 2 : Comienzo de constitución de los conjuntos permanentes. El niño ya puede hacer una colección que tenga la misma cantidad que la del modelo, pero no puede conservar esta igualdad. Aunque considera tanto la densidad como la longitud de las filas, carece todavía de la capacidad de coordinar la información proveniente de una y otra dimensión. Generalmente responde también que la fila más larga contiene más fichas pero puede atender a la densidad y decir que la fila más corta tiene más. Para Piaget, esta etapa está "caracterizada por las soluciones intermedias, que se ubican a mitad de camino entre la cantidad bruta sin invarianza y la cuantificación propiamente dicha...Por un lado el niño se siente llevado a creer en la conservación... Pero, por otro lado, esta tendencia a la conservación entra en conflicto con la apariencia que le es contraria" (Op. cit., pags. 47-48).

Etapa 3 : Conservación y coordinación cuantitativa. Los niños ya tienen la noción de conservación y dan respuestas correctas sin dejarse influir por las contrasugerencias. Al coordinar longitud y densidad están seguros de que la relación numérica inicial entre las filas de fichas se conserva independientemente de que éstas se acorten o alarguen. Son capaces de comprender el proceso de compensación que se establece entre longitud y densidad. "La diferencia entre estas respuestas y todas las que examinamos anteriormente reside en que el niño no necesita ya reflexionar para asegurarse de la conservación de las cantidades totales: está seguro a priori de ello." (Op. cit. pag.52).

Inclusión de clases:

Etapa 1 : Ausencia de composición aditiva. El niño pequeño no es capaz de incluir una clase en otra y comprender que la clase total es más grande o más numerosa que la clase incluida. La dificultad -para Piaget- radica en que hay que pensar simultáneamente en el todo y las partes. Situamos aqui los niños que responden con seguridad que "hay más piruletas de fresa que piruletas" (o más fichas verdes que fichas...), manteniendo, además su contestación, a pesar de las contrasugerencias que se le hacen.

Etapa 2 : Descubrimiento intuitivo -y no deductivo- de la respuesta correcta. Antes de la construcción correcta hay ensayos vacilantes. Los niños pueden comenzar contestando que hay más piruletas de fresa que piruletas pero luego caen en la cuenta y dan la respuesta correcta, o vacilan entre una y otra, alternando sus respuestas.

Etapa 3 : Comprensión de la relación de inclusión de una clase en otra. El niño ya es capaz de manejar correctamente las nociones de clase y subclase, de tener en cuenta al mismo tiempo dos tipos de relaciones: de inclusión-incluido y de complementariedad. De entrada y espontáneamente dá la respuesta correcta.

Seriación:

Etapa 1 : Incapacidad de construir una serie completa. Los niños constituyen pequeñas series yuxtapuestas sin establecer una de conjunto. Pueden lograr construir una escalera, pero tomando en cuenta sólo la parte superior de cada varilla.

Etapa 2 : Seriación empírica . El niño llega a construir toda la serie por el método empírico de ensayo y error

Etapa 3 : Seriación lógica. El niño construye la serie asimétrica directamente, buscando de forma sistemática el elemento que debe colocar cada vez y sabe ubicar nuevos elementos, sin tanteos.

Propiedades de la aritmética

En cada una de las tareas utilizadas para estudiar la comprensión de las propiedades aritméticas en el niño, hemos considerado también tres niveles de realización:

Inferencia de la operación:

Nivel 1 : Los niños no son capaces de inferir si la operación efectuada fuera de su presencia es una suma o una resta.

Nivel 2 : Comparando el número de objetos presentes antes y después de la transformación los niños llegan a inferir el tipo de operación efectuado pero sin especificar la cuantía en que la cantidad inicial se ha visto incrementada o disminuida.

Nivel 3 : Los niños no sólo infieren correctamente la operación sino que también concretan la cuantía de incremento o decremento en el conjunto original.

Asociatividad:

Aquí hemos clasificado las respuestas de acuerdo con las tres etapas que distingue Piaget (Op. cit. Pags.221-225):

Etapa 1 : El niño da la respuesta teniendo en cuenta únicamente las partes, prescindiendo de las totalidades que constituyen. "Los sujetos no comprenden ni la igualdad de los conjuntos a comparar I=(4+4) y II=(7+1), ni la permanencia de la segunda totalidad a despecho de los cambios de distribución de sus elementos" (Op. cit., pag 221).

Etapa 2 : Aunque en un primer momento los niños reaccionan de la misma forma, poco a poco se dan cuenta (o por lo menos son sensibles a la sugerencia) de que el aumento de los elementos de uno de los subconjuntos compensa la disminución de los elementos del otro (si 7 es mayor que 4, en cambio 1 es menor que 4 y probablemente esas igualdades se compensan). El juicio en esta etapa está, sin embargo, basado en técnicas empíricas : los niños van contando cada vez los elementos o hacen una correspondencia uno a uno.

Etapa 3 : La respuesta correcta es inmediata y dada con seguridad. Cada subconjunto se concibe en relación con el otro y ambos en relación con su suma. "Estas operaciones de composición aditiva funcionan en forma instantánea, sin que el sujeto se vea precisado a proceder previamente a coordinaciones intuitivas" (Op. cit., pag.225).

Inversión y Compensación:

En estas tareas distinguimos, siguiendo a Cooper y otros (citados por Starkey y Gelman, 1.982), tres tipos de respuesta :

Nivel 1 : Respuestas "primitivas": Los errores de los niños indican que sólo tienen en cuenta la última transformación efectuada en los conjuntos, ignorando todas las modificaciones previas.

Nivel 2 : Respuestas "cualitativas", basadas únicamente en el tipo de transformación realizado, olvidando el nº de objetos empleado en las transformaciones. De este modo, el niño contesta correctamente en los problemas de inversión simple y compensación , pero incorrectamente en las tareas de inversión y compensación incompletas.

Nivel 3 : Respuestas "cuantitativas". El niño tiene en cuenta el tipo de transformación y la cuantía de la misma , dando contestaciones correctas en los problemas de inversión y compensación tanto si estas son completas como incompletas.

Conmutatividad:

Nivel 1 : El niño no tiene en cuenta la propiedad conmutativa por lo que cada vez que se modifica el orden de los sumandos se ve en la necesidad de repetir los cálculos para hallar de nuevo la solución. Cuando se le hacen las oportunas sugerencias, no es sensible a las mismas.

Nivel 2 : En un primer momento el niño no es consciente de la conmutatividad, pero al intentar resolver los problemas, él mismo hace el descubrimiento o bien cae en la cuenta en cuanto se le sugiere.

Nivel 3 : La contestación de los niños es inmediata y saben justificarla demostrando lo evidente de la misma.

Problemas aritméticos de enunciado verbal

Para cada uno de los problemas planteados se indica si el niño ha sido capaz o no de resolverlo correctamente, mediante la puntuación 1 o 0 respectivamente. Asimismo se reseña la estrategia utilizada en cada caso, basándonos en la taxonomía ampliamente utilizada en la investigación sobre el tema (Carpenter y Moser, 1.982...):

Estrategias de adición :

Contar todo con modelos: Los niños utilizan objetos o sus dedos para representar cada uno de los sumandos y luego cuentan la unión de los dos conjuntos comenzando por el primer elemento.

Contar todo sin modelos : La secuencia de conteo comienza por uno y continúa hasta la respuesta buscada. Aquí también se cuenta todo pero sin utilizar objetos o los dedos para representar los sumandos. Esta estrategia requiere algún método para no perder de vista el número de escalones que representa el segundo sumando y saber así cuando debe detenerse el conteo. Cuando se usan los dedos, estos juegan un papel muy diferente que en la estrategia anterior: no representan el segundo sumando sino que sirven para indicar el número de escalones en la secuencia de conteo.

Conteo desde el primer sumando: El niño empieza a contar a partir del primer sumando presentado en el problema.

Conteo desde el sumando mayor: La secuencia de conteo comienza a partir del mayor de los dos sumandos, aun cuando en el problema se presente en segundo lugar.

Estrategias de sustracción :

Separar desde : El niño representa a través de objetos o de sus dedos la cantidad mayor y luego separa la cantidad mas pequeña. Contando el número de objetos que quedan da la contestación.

Contar hacia abajo desde : Es una estrategia paralela a la anterior pero basada en el conteo. El niño comienza a contar hacia atrás a partir del número mayor dado en el problema y desciende un número de escalones igual al número menor; el último número nombrado es la respuesta.

Separar hasta : El punto de partida es semejante al de la estrategia "Separar desde"(el niño representa físicamente el conjunto mayor). Sin embargo, luego se van quitando uno a uno los elementos hasta que quede un número de objetos igual a la cantidad menor dada en el problema. El número de elementos sustraídos constituye la respuesta.

Contar hacia abajo hasta : Partiendo del número mayor suministrado en el problema, el niño cuenta hacia abajo hasta llegar al número menor. El número de palabras en la secuencia de conteo es la solución del problema.

Añadir a : Supone una acción aditiva. El niño toma un número de objetos igual al número menor dado en el problema y va añadiendo hasta formar una colección igual al número mayor. Para encontrar la respuesta cuenta el número de objetos que ha añadido.

Contar hacia arriba desde : Es la estrategia de conteo paralela a la anterior. El niño inicia la secuencia de conteo hacia adelante comenzando por el número menor y terminando al llegar al número mayor. El número de palabras en la scuencia de conteo proporciona la respuesta.

Emparejar : Sólo factible cuando pueden utilizarse modelos. El niño representa dos conjuntos en correspondencia uno a uno . Contando el número de elementos desparejados encuentra la solución.

Tanto en los problemas de adición como en los de sustracción ,las estrategias mencionadas pueden dejar paso al uso de datos numéricos memorizados o bien datos derivados de los mismos.

Para la valoración de los **errores** no hemos partido de una taxonomía preestablecida, sino que ha sido a partir del análisis de los videos cómo, a posteriori, se ha establecido la categorización presentada en nuestro estudio. El proceso seguido ha sido el siguiente: hemos comenzado por recoger todos los errores cometidos por cada uno de los sujetos en los distintos problemas (independientemente del momento en que aparecen en el proceso de solución). Una vez realizado el análisis por sujetos, lo hemos hecho por problemas, describiendo para cada uno de ellos, los errores que aparecen, según curso y nivel de rendimiento. Después hemos procedido a la tabulación de los resultados, pero teniendo en cuenta únicamente el primer error cometido por cada niño en cada problema. El incluir la totalidad de los errores atendiendo al lugar de orden de cada uno de ellos, complicaba en exceso el proceso sin apenas aportar información adicional.

Para cada uno de los 48 niños examinados hemos elaborado una ficha en la que se presentan, de forma muy resumida, los resultados obtenidos en las pruebas aplicadas, incluyendo la estrategia seguida en la resolución de cada uno de los problemas aritméticos. Tanto estas fichas-resumen como la descripción de los errores cometidos por los niños de distinto curso en cada uno de los problemas, se incluyen en un anexo (anexos nº 1 y nº 4 respectivamente).

4.4. ANALISIS ESTADISTICOS

Además de recuentos de **frecuencias** y de cálculos de **porcentajes**, se ha hecho un pequeño uso de técnicas estadísticas no paramétricas:

- **Prueba ji-cuadrado** como prueba de independencia y como técnica de contraste de distribuciones observadas, tanto en el caso de datos dependientes como independientes. La hemos utilizado, por una parte, para saber si los resultados obtenidos en las distintas tareas planteadas a los niños están o no relacionados significativamente y, por otra, en el estudio de comparaciones, para averiguar si los niños de distinto curso y/o nivel de rendimiento difieren significativamente en alguno de los aspectos estudiados.

- **Coeficiente de contingencia.**: Cuando la prueba ji-cuadrado permite rechazar la hipótesis de independencia, hemos averiguado el coeficiente de contingencia para saber el grado de relación entre las dos variables, calculando asimismo la r de Pearson equivalente, siempre que es posible.

- **Prueba de la probabilidad exacta de Fisher**: La hemos utilizado con la misma finalidad que ji-cuadrado, pero cuando N<20.

- **Prueba de MacNemar para hallar la razón crítica Z**: Hemos hecho uso de esta técnica para comparar, dentro de cada grupo, el grado de dificultad de los problemas de distinta estructura semántica o presentados con distinto tamaño del número o, en el caso de los comparativos, con explicación y sin ella.

- **Prueba H de Kruskal-Wallis**: Nos ha permitido comparar las puntuaciones totales obtenidas en los problemas por los grupos de alto, medio y bajo rendimiento, dentro de cada curso.

Por otra parte, para averiguar la diferencia de medias de las puntuaciones totales obtenidas en los problemas, se ha aplicado la **prueba t de Student**.

El análisis por medio de las pruebas ji-cuadrado, Coeficiente de contingencia., H de Kruskal-Wallis y t de Student, se ha realizado a través de ordenador. Los cálculos para hallar la razón crítica Z en el estudio de la significatividad de la diferencia de proporciones y para aplicar la prueba de la probabilidad exacta de Fisher se han efectuado manualmente.

Referencias bibliográficas

BRIARS, D. J. - LARKIN, J. H. (1.984): An integrated model of skills in solving elementary word problems. Cognition and Instruction, 1, 245-296.

CARPENTER, T. P. - HIEBERT, J. - MOSER, J. M. (1.981): Problem structure and first-grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. Journal for Research in Mathematics Education, 12, 27-39.

CARPENTER, T.P. - MOSER, J. M. (1.983): Acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (eds.) : Acquisition of mathematic on concepts and processes. Academic Press. Nueva York.

CARPENTER, T.P. - MOSER, J.M. (1.982): The development of addition and subtraction problem - solving skills. En T. P. Carpenter - J. M. Moser y T.A. Romberg (Eds.): Addition and Subtraction: a cognitive perspective. Erlbaum. Hillsdale, New Jersey.

CARPENTER, T.P. - MOSER, J.M. (1.984): The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one trough three. Journal of Research in Mathematics Education, 15, 179 - 202.

GELMAN, R. - GALLISTEL, C.R. (1.978): The child understanding of number. Harvard University Press. Cambridge, Massachusetts.

IBARRA, C.G. - LINDVALL, C.M. (1.982): Factors associated with the ability of kindergarten children to solve simple arithmetic story problems.Journal of Educational Research, 75, 149-155.

LINDVALL, C.M. - IBARRA, C.G. (1.980, abril): The development of problem-solving capabilities in kindergarten and first grade children. Comunicación presentada en el encuentro anual del National Council of Teachers of Matematics. Seattle.

PIAGET, J. - SZEMINSKA, A. (1.975): Génesis del número en el niño. Guadalupe. Buenos Aires. (Public. orig. 1.941)

RILEY, M.S. - GREENO,J.G. - HELLER, J.I. (1.983): Development of children's problem-solving ability in arithmetic. En H. Ginsburg (ed.): The development of mathematical thinking. Academic Press. Nueva York.

SASTRE,G. (1.983): La enseñanza de las matemáticas y el aprendizaje de la alienación. En M.Moreno y equipo IMIPAE: La pedagogía operatoria. Laia. Barcelona.

STARKEY, P. - GELMAN, R. 1.982): The development of addition and subtraction abilities prior to formal schooling in arithmetic. En Carpenter, T.P.-Moser, J.M.-Romberg, T.A.(eds.): Addition and subtraction: A cognitive perspective. Erlbaum. Hillssdale, New Jersey.

TAMBURINO, J.L. (1.980): An analysis of the modelling processes used by kindergarten children in solving simple addition and subtraction story problems. Tesis doctoral sin publicar. University of Pittsburgh.

5. RESULTADOS

5.1 RESPUESTAS CORRECTAS EN LAS DISTINTAS TAREAS PRESENTADAS

La primera parte de nuestro estudio empírico es estrictamente cuantitativa. En ella vamos a presentar las frecuencias y porcentajes de respuestas correctas en cada una de las tareas, así como los resultados obtenidos del análisis estadístico de los mismos. Queda dividido, a su vez, en tres apartados:

- En primer lugar presentamos, para **cada una de las tareas por separado**, las **frecuencias y porcentajes de respuestas correctas** encontradas, tanto globales, como los referidos a los distintos cursos y niveles de rendimiento.

En el caso de las pruebas piagetianas, tenemos en cuenta tres categorías de respuesta, en función de la etapa del desarrollo indicada por la contestación del niño.

Por lo que se refiere a los problemas, constatamos, únicamente, si el niño llega a resolverlos, aunque sea después de titubeos e incluso errores; es decir, tenemos en cuenta si el niño se muestra capaz de encontrar la solución, independientemente del proceso seguido para ello; las categorías de respuesta son, por lo tanto, sólo dos: éxito o fracaso. Distinguimos entre la presentación con números pequeños y con números grandes, aunque hay que recordar que los problemas no se han aplicado sistemáticamente en las dos magnitudes del número a todos los niños, sino que, en el caso de los preescolares, se presentaron inicialmente con números pequeños y, sólo si los resolvían, se planteaban con números grandes, mientras que los niños de EGB debían resolver primero los problemas con números grandes, reduciendo el tamaño del número en caso de fallo.

Las frecuencias y porcentajes se presentan en tablas que van acompañadas de sus correspondientes gráficos.

- En un segundo apartado nos detenemos en el **estudio comparativo** de las respuestas correctas. Presentamos, por una parte, los resultados de aplicar las pruebas **ji-cuadrado** y de la **probabilidad exacta de Fisher** (ésta última sólo cuando no se cumplen los requisitos necesarios para la aplicación de la anterior) para delimitar la influencia de las variables curso y nivel de rendimiento (separadamente y en interacción), en la ejecución de cada una de las tareas, asi como los obtenidos mediante la **prueba t de Student** para comparar las medias de las puntuaciones totales alcanzadas en los problemas

Por otra, se recogen los resultados de hallar la **razón crítica Z** entre las distintas proporciones de respuestas correctas en los problemas, según el método de **MacNemar**, para averiguar si las diferencias en su grado de dificultad alcanzan significatividad estadistica, delimitando por separado la influencia ejercida por la variedad del problema (resultado de la acción conjunta de la estructura semántica, ubicacion de la incógnita y tipo de acción implicada), el contexto lingüistico (sólo en los problemas comparativos), y el tamaño del número.

- La tercera parte se dedica a estudiar las **relaciones** encontradas en los resultados obtenidos en las distintas pruebas, mediante el **test de ji-cuadrado** utilizado como prueba de independencia, y en el caso de no cumplirse las exigencias requeridas para su aplicación, mediante la prueba de la **probabilidad exacta de Fisher.** Presentamos en cada caso el coeficiente de Contingencia hallado, así como, siempre que es posible, su equivalencia en coeficiente de correlación **r**. De este modo se averigua la relación de las pruebas piagetianas entre sí, de las pruebas de las propiedades aritméticas entre sí, de unas con otras y de unas y otras con los problemas aritméticos en los dos tamaños del número, y, por fin, de los distintos problemas entre sí.

Aunque se desciende a analizar los resultados en los distintos cursos y, dentro de cada uno de ellos, en los distintos niveles de rendimiento, se ha visto la necesidad de realizar también los cálculos agrupando los resultados obtenidos en Preescolar por una parte y en EGB por otra, dada la exigüidad de las muestras que quedan tras las sucesivas subdivisiones (12 alumnos en cada curso, de los que 4 son de cada nivel de rendimiento).

5.1.1 Frecuencias y porcentajes de respuestas correctas

Tabla 5.1.1 : FRECUENCIAS Y PORCENTAJES DE RESPUESTAS CORRECTAS EN LOS PROBLEMAS ARITMETICOS

	1º de Preescolar		2º de Preescolar		1º de EGB		2º de EGB		MUESTRA TOTAL	
Problemas	Nº Grandes	NºPequeños	Nº Grandes	NºPequeños	Nº Grandes	NºPequeños	Nº Grandes	NºPequeños	Nº Grandes	NºPequeños
1 Cambio 1	5 (41.60%)	11 (91,67%)	10 (83,33%)	12 (100%)	12 (100%)	12 (100%)	12 (100%)	12 (100%)	39 (81,25%)	47 (97,92%)
2 Cambio 2	5 (41,66%)	10 (83,33%)	11 (91,67%)	11 (91,67%)	12 (100%)	12 (100%)	12 (100%)	12 (100%)	40 (83,33%)	45 (93,75%)
3 Cambio 3	2 (16.66%)	4 (33,33%)	6 (50%)	9 (75%)	9 (75%)	11 (91.67%)	12 (100%)	12 (100%)	29 (60,42%)	36 (75%)
4 Cambio 4	2 (16,66	7 (58,33%)	10 (83,33%)	12 (100%)	11 (91,67%)	12 (100%)	12 (100%)	12 (100%)	35 (72,92%)	43 (89,58%)
5 Cambio 5	1 (8,33%)	2 (16,67%)	1 (8,33%)	1 (8,33%)	8 (66,67%)	9 (75%)	11 (91,67%)	12 (100%)	21 (43,75%)	24 (50%)
6 Cambio 6	2 (16,66%)	9 (75%)	8 (66,67%)	11 (91,67%)	11 (91,67%)	12 (100%)	11 (91,67%)	12 (100%)	32 (66,67%)	44 (91,67%)
7 Combinación 1	3 (25%)	7 (58,33%)	11 (91,67%)	12 (100%)	11 (91,67%)	12 (100%)	12 (100%)	12 (100%)	37 (77,08%)	43 (89,58%)
8 Combinación 2	2 (16,66%)	5 (41,67%)	6 (50%)	9 (75%)	10 (83,33%)	10 (83,33%)	11 (91,67%)	12 (100%)	29 (60,42%)	36 (75%)
9 Comparación 1	3 (25%)	7 (58,33%)	10 (83,33%)	12 (100%)	10 (83,33%)	12 (100%)	12 (100%)	12 (100%)	35 (72,92%)	43 (89,58%)
10 Comparación 2	3 (25%)	7 (58,33%)	6 (50%)	12 (100%)	10 (83,33%)	12 (100%)	12 (100%)	12 (100%)	31 (64,58%)	43 (89,58%)
11 Comparación 3	0	6 (50%)	3 (25%)	7 (58,33%)	5 (41,67%)	10 (83,33%)	12 (100%)	12 (100%)	20 (41,67%)	35 (72,92%)
12 Igualación 1	6 (50%)	8 (66,67%)	11 (91,67%)	12 (100%)	11 (91,67%)	12 (100%)	12 (100%)	12 (100%)	40 (83,33%)	44 (91,67%)
13 Igualación 2	6 (50%)	8 (66,67%)	11 (91,67%)	12 (100%)	12 (100%)	12 (100%)	12 (100%)	12 (100%)	41 (85,42%)	44 (91,67%)
14 Igualación 3	4 (33,33%)	8 (66,67%)	6 (50%)	11 (91,67%)	11 (91,67%)	11 (91,67%)	12 (100%)	12 (100%)	33 (68,75%)	42 (87,5%)
15 Igualación 4	2 (16,66%)	5 (41,67%)	1 (8,33%)	5 (41,67%)	7 (58,33%)	9 (75%)	10 (83,33%)	12 (100%)	20 (41,67%)	31 (64,58%)
16 Igualación 5	0	6 (50%)	6 (50%)	9 (75%)	9 (75%)	12 (100%)	12 (100%)	12 (100%)	27 (56,25%)	39 (81,25%)
17 Igualación 6	2 (16,66%)	8 (66,67%)	10 (83,33%)	11 (91,67%)	9 (75%)	12 (100%)	11 (91,67%)	12 (100%)	32 (66,67%)	43 (89,58%)

Gráfico 5.1.1

Porcentaje de respuestas correctas en los problemas con números grandes, en los distintos cursos escolares

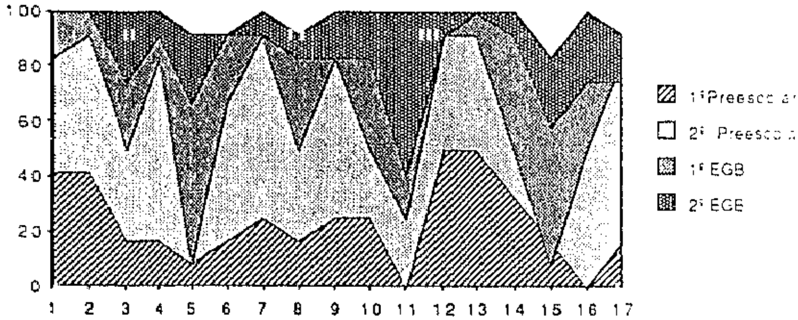


Gráfico 5.1.2

Porcentaje de respuestas correctas en los problemas con números pequeños, en los distintos cursos escolares

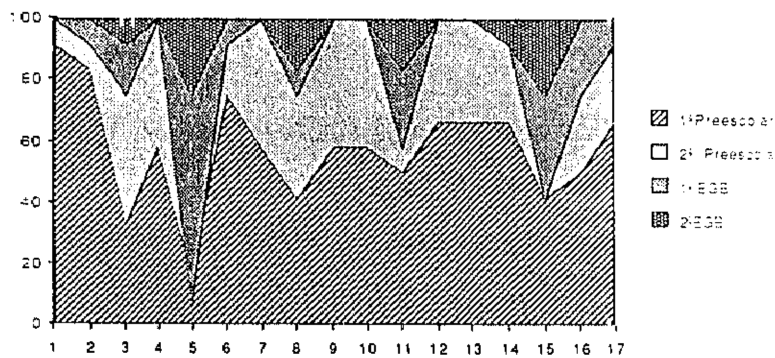


Tabla 5.1.2 : PORCENTAJE DE EXITO EN LOS PROBLEMAS SEGUN NIVELES DE RENDIMIENTO EN 1º DE PREESCOLAR

	NIVEL ALTO		NIVEL MEDIO		NIVEL BAJO	
Problemas	Nº Grandes	Nº Pequeños	Nº Grandes	Nº Pequeños	Nº Grandes	Nº Pequeños
Cambio 1	4 (100%)	4 (100%)	0	4 (100%)	0	3 (75%)
Cambio 2	3 (75%)	4 (100%)	2 (50%)	4 (100%)	0	2 (50%)
Cambio 3	2 (50%)	3 (75%)	0	1 (25%)	0	0
Cambio 4	2 (50%)	3 (75%)	0	3 (75%)	0	1 (25%)
Cambio 5	1 (25%)	2 (50%)	0	0	0	0
Cambio 6	2 (50%)	4 (100%)	0	3 (75%)	0	2 (50%)
Combinación 1	3 (75%)	4 (100%)	0	3 (75%)	0	0
Combinación 2	2 (50%)	3 (75%)	0	2 (50%)	0	0
Comparación 1	2 (50%)	4 (100%)	1 (25%)	3 (75%)	0	0
Comparación 2	3 (75%)	3 (75%)	0	3 (75%)	0	1 (25%)
Comparación 3	0	3 (75%)	0	1 (25%)	0	2 (50%)
Igualación 1	3 (75%)	4 (100%)	3 (75%)	3 (75%)	0	1 (25%)
Igualación 2	3 (75%)	4 (100%)	3 (75%)	4 (100%)	0	0
Igualación 3	3 (75%)	3 (75%)	1 (25%)	4 (100%)	0	1 (25%)
Igualación 4	2 (50%)	2 (50%)	0	1 (25%)	0	2 (50%)
Igualación 5	0	3 (75%)	0	3 (75%)	0	0
Igualación 6	2 (50%)	4 (100%)	0	3 (75%)	0	1 (25%)

Gráfico 5.1.3

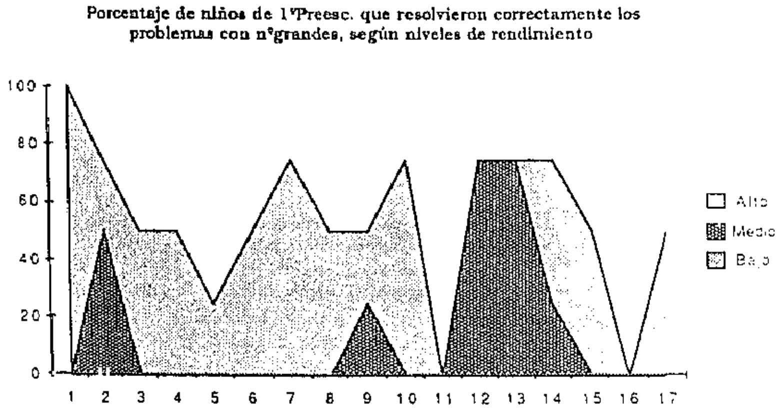


Gráfico 5.1.4

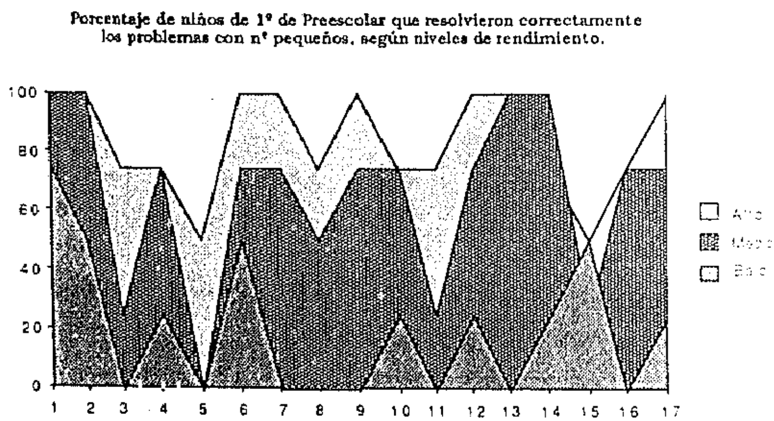


Tabla 5.1.3 : PORCENTAJE DE EXITO EN LOS PROBLEMAS SEGUN NIVELES DE RENDIMIENTO EN 2º DE PREESCOLAR

	NIVEL ALTO		NIVEL MEDIO		NIVEL BAJO	
Problemas	NºGrandes	NºPequeños	NºGrandes	NºPequeños	NºGrandes	NºPequeños
Cambio 1	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	2 (50%)	4 (100%)
Cambio 2	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	3 (75%)	3 (75%)
Cambio 3	3 (75%)	4 (100%)	2 (50%)	3 (75%)	1 (25%)	2 (50%)
Cambio 4	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	2 (50%)	4 (100%)
Cambio 5	1 (25%)	1 (25%)	0	0	0	0
Cambio 6	4 (100%)	4 (100%)	3 (75%)	4 (100%)	1 (25%)	3 (75%)
Combinación 1	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	3 (75%)	4 (100%)
Combinación 2	2 (50%)	4 (100%)	3 (75%)	4 (100%)	1 (25%)	1 (25%)
Comparación 1	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	2 (50%)	4 (100%)
Comparación 2	4 (100%)	4 (100%)	2 (50%)	4 (100%)	0	4 (100%)
Comparación 3	3 (75%)	4 (100%)	0	3 (75%)	0	0
Igualación 1	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	3 (75%)	4 (100%)
Igualación 2	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	3 (75%)	4 (100%)
Igualación 3	3 (75%)	4 (100%)	2 (50%)	4 (100%)	1 (25%)	3 (75%)
Igualación 4	1 (25%)	3 (75%)	0	0	0	2 (50%)
Igualación 5	3 (75%)	4 (100%)	2 (50%)	2 (50%)	1 (25%)	3 (75%)
Igualación 6	3 (75%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	3 (75%)	3 (75%)

Gráfico 5.1.5

Porcentaje de niños de 2º de Preescolar que resolvieron correctamente los problemas con nº grandes, según niveles de rendimiento

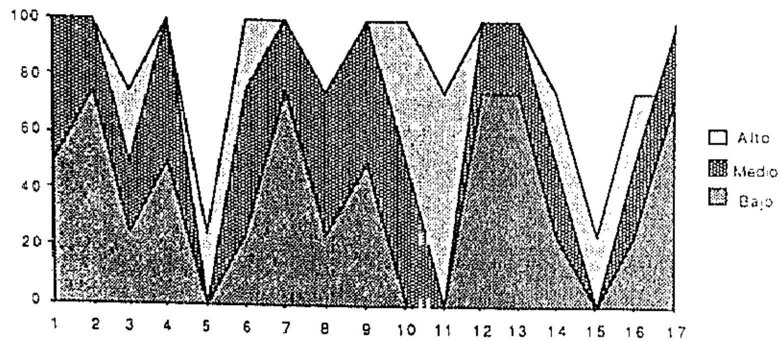


Gráfico 5.1.6

Porcentaje de niños de 2º de Preescolar que resolvieron correctamente los problemas con nº pequeños, según niveles de rendimiento.

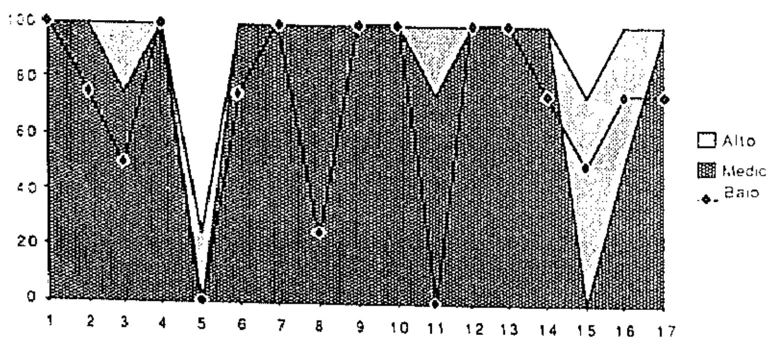


Tabla 5.1.4 : PORCENTAJE DE EXITO EN LOS PROBLEMAS SEGUN NIVELES DE RENDIMIENTO EN 1º DE EGB

	NIVEL ALTO		NIVEL MEDIO		NIVEL BAJO	
Problemas	NºGrandes	NºPequeños	NºGrandes	NºPequeños	NºGrandes	NºPequeños
Cambio 1	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)
Cambio 2	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)
Cambio 3	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	1 (25%)	3 (75%)
Cambio 4	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	3 (75%)	4 (100%)
Cambio 5	4 (100%)	4 (100%)	3 (75%)	4 (100%)	1 (25%)	1 (25%)
Cambio 6	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	3 (75%)	4 (100%)
Combinación 1	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	3 (75%)	4 (100%)
Combinación 2	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	2 (50%)	2 (50%)
Comparación 1	4 (100%)	4 (100%)	3 (75%)	4 (100%)	3 (75%)	4 (100%)
Comparación 2	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	2 (50%)	4 (100%)
Comparación 3	2 (50%)	4 (100%)	3 (75%)	4 (100%)	0	2 (50%)
Igualación 1	4 (100%)	4 (100%)	3 (75%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)
Igualación 2	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)
Igualación 3	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	3 (75%)	3 (75%)
Igualación 4	4 (100%)	4 (100%)	2 (50%)	3 (75%)	1 (25%)	2 (50%)
Igualación 5	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	1 (25%)	4 (100%)
Igualación 6	4 (100%)	4 (100%)	3 (75%)	4 (100%)	2 (50%)	4 (100%)

Gráfico 5.1.7

Porcentaje de niños de 1º de EGB que resolvieron correctamente los problemas con nº grandes, según niveles de rendimiento

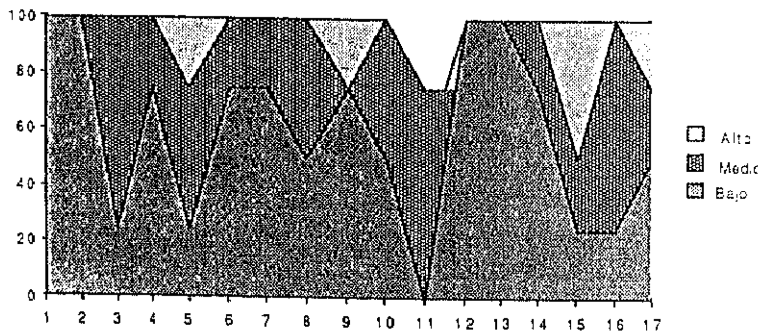


Gráfico 5.1.8

Porcentaje de niños de 1º de EGB que resolvieron correctamente los problemas con nº pequeños, según niveles de rendimiento.

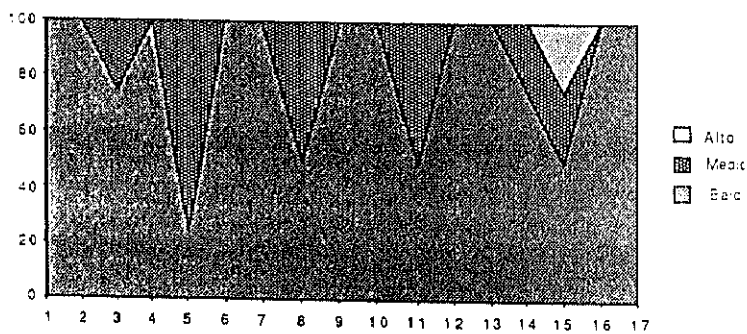


Tabla 5.1.5 : PORCENTAJE DE EXITO EN LOS PROBLEMAS SEGUN NIVELES DE RENDIMIENTO EN 2º DE EGB

	NIVEL ALTO		NIVEL MEDIO		NIVEL BAJO	
Problemas	**NºGrandes**	**NºPequeños**	**NºGrandes**	**NºPequeños**	**NºGrandes**	**NºPequeños**
Cambio 1	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)
Cambio 2	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)
Cambio 3	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)
Cambio 4	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)
Cambio 5	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	3 (75%)	4 (100%)
Cambio 6	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	3 (75%)	4 (100%)
Combinación 1	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)
Combinación 2	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	3 (75%)	4 (100%)
Comparación 1	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)
Comparación 2	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)
Comparación 3	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)
Igualación 1	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)
Igualación 2	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)
Igualación 3	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)
Igualación 4	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	2 (50%)	4 (100%)
Igualación 5	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)
Igualación 6	4 (100%)	4 (100%)	3 (75%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)

Gráfico 5.1.9

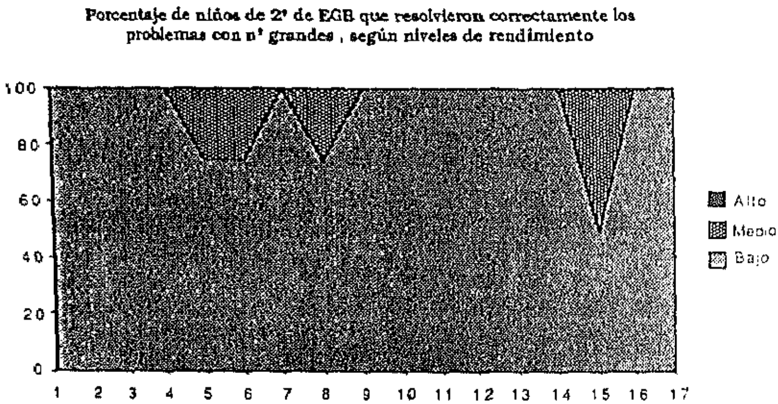

Porcentaje de niños de 2º de EGB que resolvieron correctamente los problemas con nº grandes , según niveles de rendimiento
100
80
60
40
20
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
Alto
Medio
Bajo

Tabla 5.I.6 : RESULTADO EN LOS PROBLEMAS COMPARATIVOS SIN EXPLICACION

Problemas con números pequeños

	1º de Preescolar	**2º de Preescolar**
Comparación 1	1 (8,33%)	4 (33,33%)
Comparación 2	1 (8,33%)	3 (25%)
Comparación 3	2 (16,67%)	5 (41,67%)

Problemas con números grandes

	1º de EGB	**2º de EGB**
Comparación 1	0	9 (75%)
Comparación 2	0	7 (58,33%)
Comparación 3	2 (16,67%)	8 (66,67%)

Comprenden con seguridad el término comparativo:

1º de Preescolar	1 (8,33%)
2º de Preescolar	2 (16,67%)
1º de EGB	0
2º de EGB	7 (58,33%)

Tabla 5.1.7 : RESULTADOS EN LA TAREA PIAGETIANA DE CONSERVACION

		1° Preescolar	2°Preescolar	1° de EGB	2° de EGB	TOTAL
	Nivel Alto	1 (25%)	0	3 (75%)	3 (75%)	
CONSERVADORES	Nivel Medio	0	0	1 (25%)	4 (100%)	
(Etapa 3)	Nivel Bajo	0	0	1 (25%)	2 (50%)	
	Total	**1 (8,33%)**	**0**	**5 (41,67%)**	**9 (75%)**	**15 (31,25%)**
	Nivel Alto	3 (75%)	3 (75%)	1 (25%)	1 (25%)	
NO CONSERVADORES	Nivel Medio	4 (100%)	4 (100%)	3 (75%)	0	
(Etapa 2)	Nivel Bajo	2 (50%)	3 (75%)	2 (50%)	2 (50%)	
	Total	**9 (75%)**	**10 (83,33%)**	**6 (50%)**	**3 (25%)**	**28 (20,83%)**
	Nivel Alto	0	1 (25%)	0	0	
NO CONSERVADORES	Nivel Medio	0	0	0	0	
(Etapa 1)	Nivel Bajo	2 (50%)	1 (25%)	1 (25%)	0	
	Total	**2 (16,67%)**	**2 (16,67%)**	**1 (8,33%)**	**0**	**5 (10,42%)**

RESULTADOS OBTENIDOS EN LA TAREA DE CONSERVACION

Gráfico 5.1.10

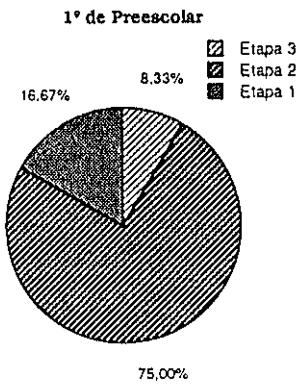


Gráfico 5.1.11

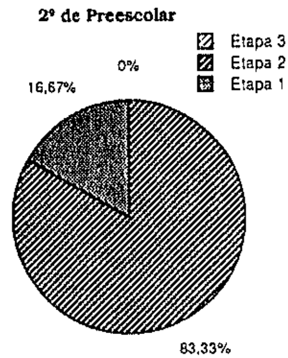


Gráfico 5.1.12

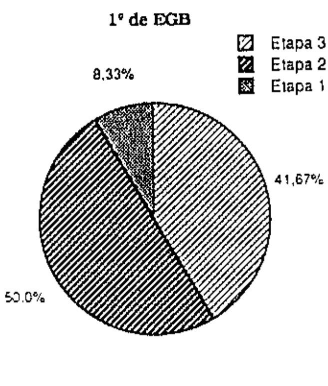


Gráfico 5.1.13

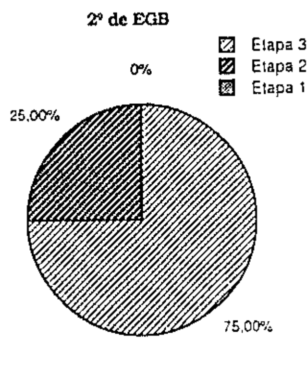


Tabla 5.1.6 : RESULTADOS EN LA TAREA DE INCLUSION DE CLASES

		1ºPreescolar	2ºPreescolar	1º de EGB	2º de EGB	Total
	Alto	2 (50%)	0	1 (25%)	4 (100%)	
	Medio	0	2 (50%)	0	4 (100%)	
Etapa 3	Bajo	0	0	0	3 (75%)	
	Total	2 (16,67%)	2 (16,67%)	1 (8,33%)	11 (91,67%)	16 (33,33%)
	Alto	0	3 (75%)	1 (25%)	0	
	Medio	1 (25%)	0	4 (100%)	0	
Etapa 2	Bajo	0	0	1 (25%)	0	
	Total	1 (8,33%)	3 (25%)	6 (50%)	0	10 (20,83%)
	Alto	2 (50%)	1 (25%)	2 (50%)	0	
	Medio	3 (75%)	2 (50%)	0	0	
Etapa 1	Bajo	4 (100%)	4 (100%)	3 (25%)	1 (25%)	
	Total	9 (75%)	7 (58,33%)	5 (41,67%)	1 (8,33%)	22 (43,40%)

RESULTADOS EN LA TAREA DE INCLUSION DE CLASES

Gráfico 5.1.14

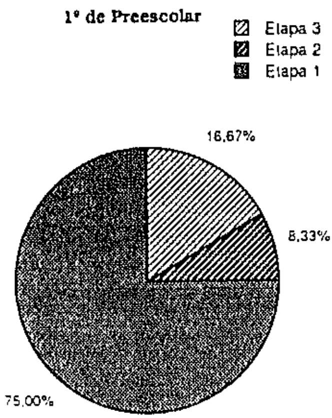


Gráfico 5.1.15

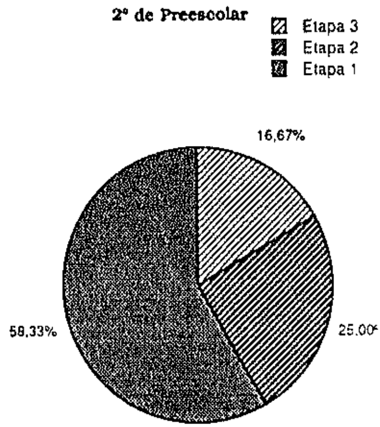


Gráfico 5.1.16

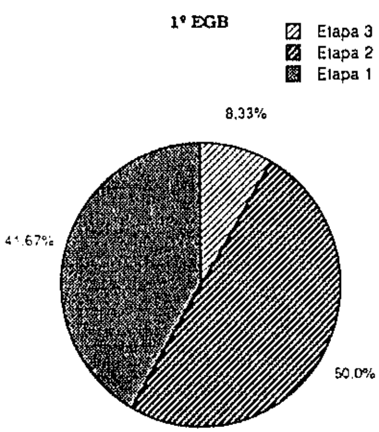


Gráfico 5.1.17

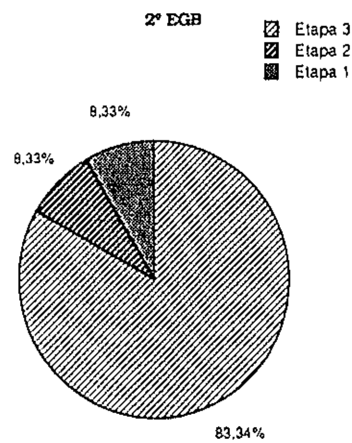


Tabla 5.1.9 : RESULTADOS EN LA TAREA PIAGETIANA DE SERIACION

		1ºPreescolar	2ºPreescolar	1º de EGB	2º de EGB	Total
	Alto	2 (50%)	1 (25%)	2 (50%)	4 (100%)	
	Medio	1 (25%)	2 (50%)	2 (50%)	1 (25%)	
Etapa 3	Bajo	0	2 (50%)	0	2 (50%)	
	Total	3 (25%)	5 (41,67%)	4 (33,33%)	7 (58,33%)	19 (39,58%)
	Alto	2 (50%)	3	2 (50%)	0	
	Medio	2 (50%)	1 (25%)	2 (50%)	3 (75%)	
Etapa 2	Bajo	0	2 (50%)	2 (50%)	2 (50%)	
	Total	4 (33,33%)	6 (50%)	6 (50%)	5 (41,67%)	21 (43,75%)
	Alto	0	0	0	0	
	Medio	1 (25%)	1 (25%)	0	0	
Etapa 1	Bajo	4 (100%)	0	2 (50%)	0	
	Total	5 (41,67%)	1 (8,33%)	2 (16,67%)	0	8 (16,67%)

RESULTADOS EN LA TAREA DE SERIACION

Gráfico 5.1.18

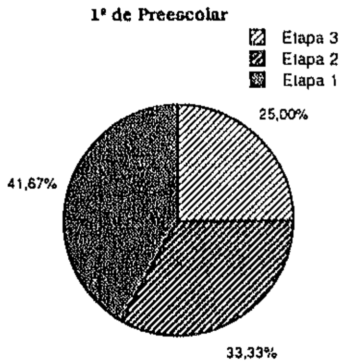


Gráfico 5.1.19

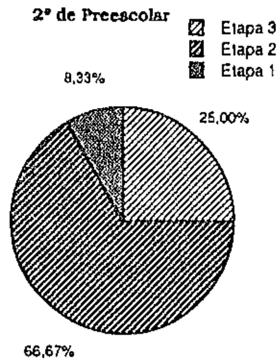


Gráfico 5.1.20

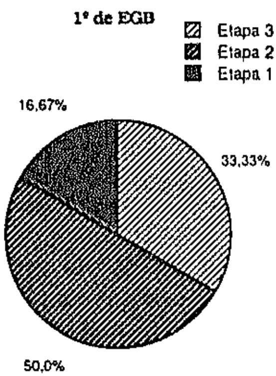


Gráfico 5.1.21

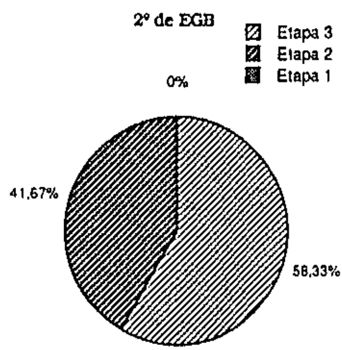


Tabla 5.1.10 : RESULTADOS EN LAS CUESTIONES SOBRE LA PROPIEDAD CONMUTATIVA

		1° Preescolar	2°Preescolar	1° de EGB	2° de EGB	TOTAL
Etapa 3	Nivel Alto	2 (50%)	3 (75%)	4 (100%)	4 (100%)	
	Nivel Medio	0	2 (50%)	4 (100%)	4 (100%)	
	Nivel Bajo	0	0	0	3 (75%)	
	Total	2 (16,67%)	5 (41,66%)	8 (66,67%)	11 (91,67%)	26 (54,16%)
Etapa 2	Nivel Alto	0	1 (25%)	0	0	
	Nivel Medio	1 (25%)	0	0	0	
	Nivel Bajo	1 (25%)	1 (25%)	1 (25%)	1 (25%)	
	Total	2 (16,67%)	2 (16,67%)	1 (8,33%)	1 (8,33%)	6 (12,5%)
Etapa 1	Nivel Alto	2 (50%)	0	0	0	
	Nivel Medio	3 (75%)	2 (50%)	0	0	
	Nivel Bajo	3 (75%)	3 (75%)	3 (75%)	0	
	Total	8 (66,67%)	5 (41,67%)	3 (25%)	0	16 (33,33%)

RESULTADOS OBTENIDOS EN LA TAREA DE LA CONMUTATIVIDAD

Gráfico 5.1.22 :

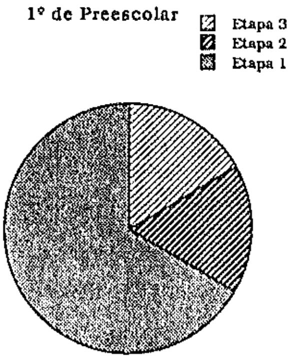


Gráfico 5.1.23 :

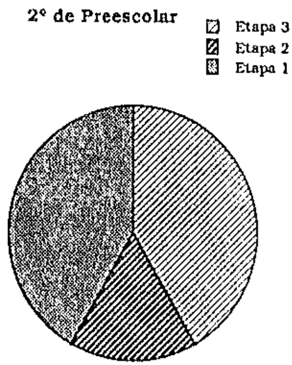


Gráfico 5.1.24 :

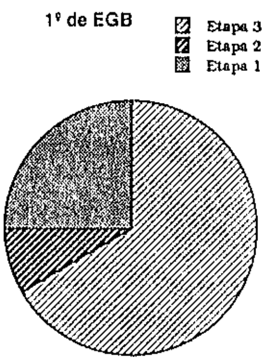


Gráfico 5.1.25 :

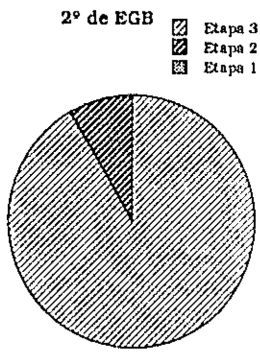


Tabla 5.1.11 : RESULTADOS EN LA TAREA SOBRE LA PROPIEDAD ASOCIATIVA

		1º Preescolar	2ºPreescolar	1º de EGB	2º de EGB	TOTAL
Etapa 3	Nivel Alto	0	0	2 (50%)	1 (25%)	
	Nivel Medio	0	0	2 (50%)	3 (75%)	
	Nivel Bajo	0	0	0	0	
	Total	0	0	4 (33,33%)	4 (33,33%)	8 (16,67%)
Etapa 2	Nivel Alto	2 (50%)	3 (75%)	2 (50%)	3 (75%)	
	Nivel Medio	0	3 (75%)	1 (25%)	1 (25%)	
	Nivel Bajo	0	0	1 (25%)	2 (50%)	
	Total	2 (16,67%)	6 (50%)	4 (33,33%)	6 (50%)	6 (12,5%)
Etapa 1	Nivel Alto	2 (50%)	1 (25%)	0	0	
	Nivel Medio	4 (100%)	1 (25%)	1 (25%)	0	
	Nivel Bajo	4 (100%)	4 (100%)	3 (75%)	2 (50%)	
	Total	10 (83,33%)	6 (50%)	4 (33,33%)	2 (16,67%)	22 (45,83%)

RESULTADOS EN LA TAREA DE LA ASOCIATIVIDAD

Gráfico 5.1.26 :

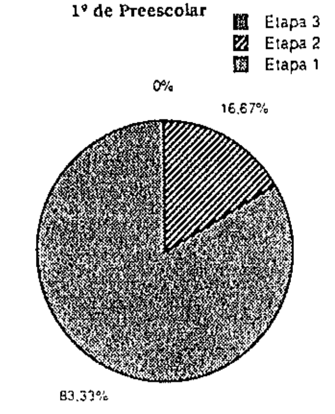


Gráfico 5.1.27 :

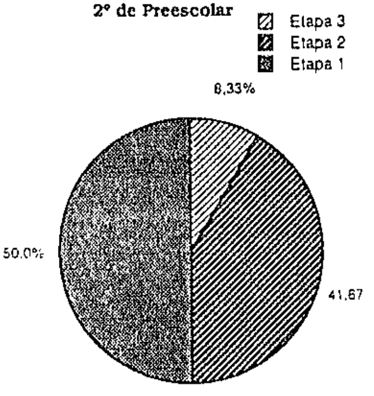


Gráfico 5.1.28 :

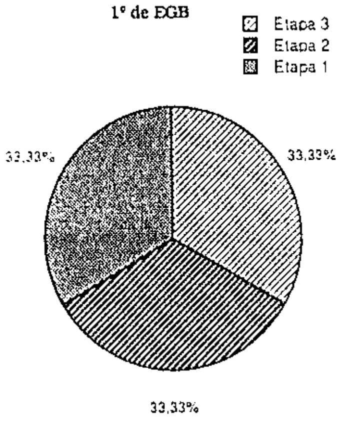


Gráfico 5.1.29 :

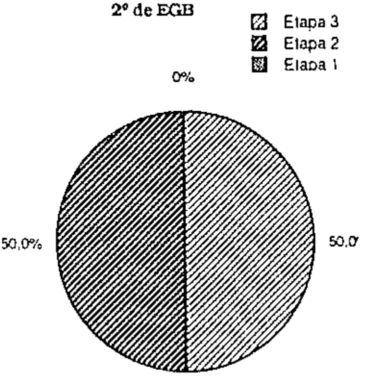


Tabla 5.1.12 : RESULTADOS EN LA TAREA SOBRE LA INVERSION

		1° Preescolar	2°Preescolar	1° de EGB	2° de EGB	TOTAL
Etapa 3	Nivel Alto	0	1 (25%)	4 (100%)	4 (100%)	
	Nivel Medio	1 (25%)	1 (25%)	2 (50%)	2 (50%)	
	Nivel Bajo	0	0	0	1 (25%)	
	Total	1 (8,33%)	2 (16,67%)	6 (50%)	7 (58,33%)	16 (33,33%)
Etapa 2	Nivel Alto	4 (100%)	3 (75%)	0	0	
	Nivel Medio	3 (75%)	3 (75%)	2 (50%)	2 (16,67%)	
	Nivel Bajo	1 (25%)	4 (100%)	3 (75%)	3 (75%)	
	Total	8 (66,67%)	10 (83,33%)	5 (41,67%)	5 (41,67%)	28 (58,33%)
Etapa 1	Nivel Alto	0	0	0	0	
	Nivel Medio	0	0	0	0	
	Nivel Bajo	3 (75%)	0	1 (25%)	0	
	Total	3 (25%)	0	1 (8,33%)	0	4 (8,33%)

RESULTADOS EN LA TAREA DE INVERSION

Gráfico 5.1.30 :

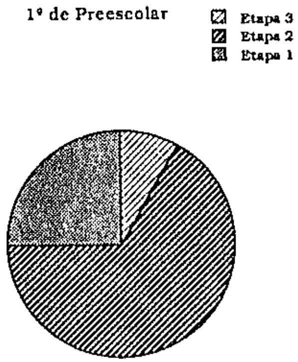


Gráfico 5.1.31 :

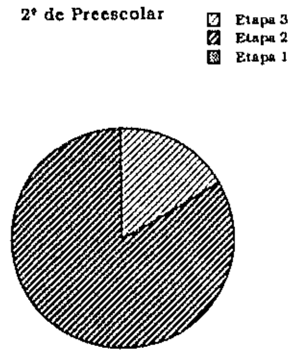


Gráfico 5.1.32 :

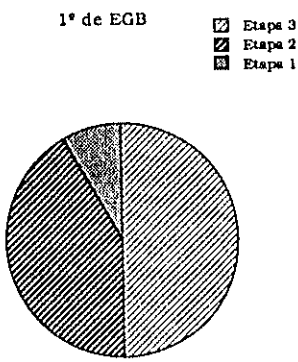


Gráfico 5.1.33 :

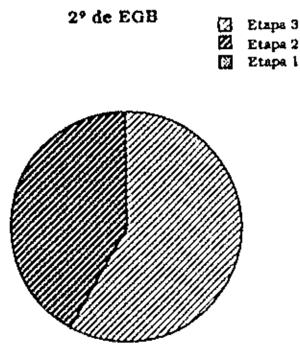


Tabla 5.1.13 : RESULTADOS EN LA TAREA SOBRE LA COMPENSACION

		1° Preescolar	2°Preescolar	1° de EGB	2° de EGB	TOTAL
Etapa 3	Nivel Alto	1 (25%)	1 (25%)	4 (100%)	3 (75%)	
	Nivel Medio	0	0	2 (50%)	2 (50%)	
	Nivel Bajo	0	1 (25%)	0	1 (25%)	
	Total	1 (8,33%)	2 (16,67%)	6 (50%)	6 (50%)	15 (31,25%)
Etapa 2	Nivel Alto	3 (75%)	3 (75%)	0	1 (25%)	
	Nivel Medio	4 (100%)	4 (100%)	2 (50%)	2 (16,67%)	
	Nivel Bajo	4 (100%)	3 (75%)	4 (100%)	3 (75%)	
	Total	11 (91,67%)	10 (83,33%)	6 (50%)	6 (50%)	33 (68,75%)
Etapa 1	Nivel Alto	0	0	0	0	
	Nivel Medio	0	0	0	0	
	Nivel Bajo	0	0	0	0	
	Total	0	0	0	0	0

RESULTADOS EN LA TAREA DE COMPENSACION

Gráfico 5.1.34 :

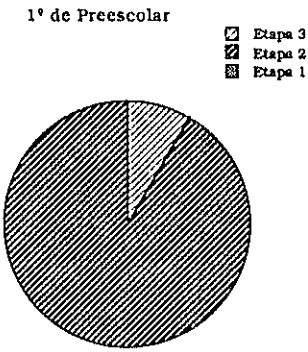


Gráfico 5.1.35 :

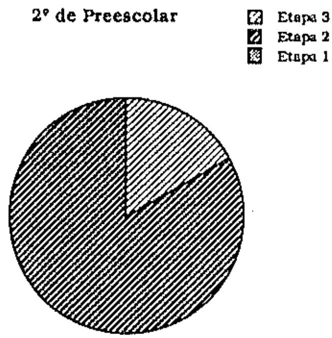


Gráfico 5.1.36 :

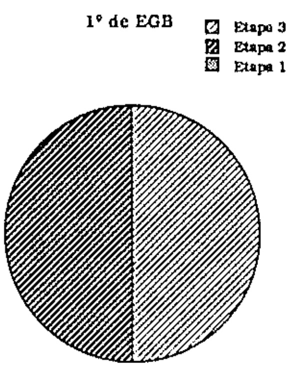


Gráfico 5.1.37 :

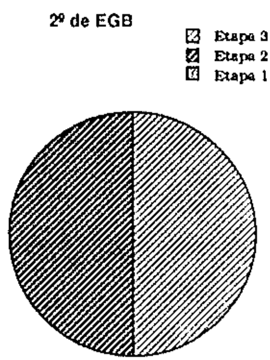


Tabla 5.1.14 : RESULTADOS EN LA TAREA SOBRE LA INFERENCIA DE LA OPERACIÓN

		1° Preescolar	2°Preescolar	1° de EGB	2° de EGB	TOTAL
Etapa 3	Nivel Alto	2 (50%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	
	Nivel Medio	2 (50%)	4 (100%)	4 (100%)	4 (100%)	
	Nivel Bajo	0	2 (50%)	2 (50%)	4 (100%)	
	Total	**4 (33,33%)**	**10 (83,33%)**	**10 (83,33%)**	**12 (100%)**	36 (75%)
Etapa 2	Nivel Alto	2 (50%)	0	0	0	
	Nivel Medio	2 (50%)	0	0	0	
	Nivel Bajo	2 (50%)	2 (50%)	2 (50%)	0	
	Total	**6 (50%)**	**2 (16,67%)**	**2 (16,67%)**	0	10 (20,83%)
Etapa 1	Nivel Alto	0	0	0	0	
	Nivel Medio	0	0	0	0	
	Nivel Bajo	2 (16,67%)	0	0	0	
	Total	**2**	**0**	**0**	**0**	2 (4,17%)

RESULTADOS EN LA TAREA DE INFERENCIA DE LA OPERACION

Gráfico 5.1.38 :

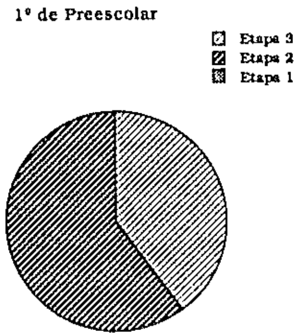


Gráfico 5.1.39 :

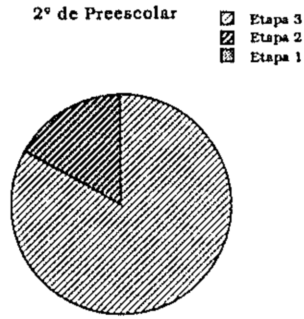


Gráfico 5.1.40:

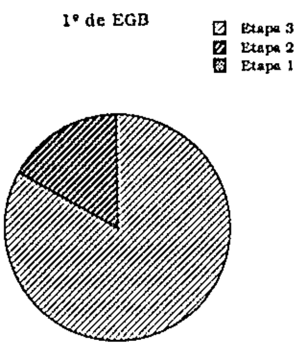
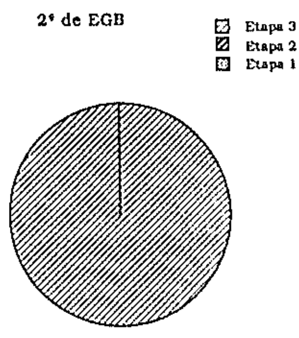


Gráfico 5.1.41 :



5.1.2 Estudio comparativo

Para contrastar las distribuciones observadas hemos utilizado la prueba ji-cuadrado y, en el caso de N< 20 el test de la probabilidad exacta de Fisher. La comparación de las medias de las puntuaciones obtenidas en los problemas se ha realizado por medio de la prueba t de Student o de la H de Kruskal-Wallis. Para contrastar, dentro de cada grupo, el grado de dificultad de los problemas, se ha averiguado la razón crítica Z mediante un procedimiento propuesto por MacNemar.

Comparación de los resultados obtenidos en distintos cursos

Comparación entre Preescolar y EGB

. Pruebas piagetianas :

Los cursos de Preescolar tomados conjuntamente difieren significativamente de los de EGB en las pruebas de **Conservación del número** y de **Inclusión de clases**. En el primer caso ha sido necesario agrupar las categorías correspondientes a las etapas 1 y 2 porque nos encontramos en algunas casillas frecuencias teóricas menores de 5. La diferencia observada ha resultado ser altamente significativa (p = 0.0002) y el coeficiente de Contingencia entre la variable Curso y la variable Conservación ha resultado ser de 0.504, equivalente a r = 0.844. En Inclusión de clases se han mantenido las tres categorías y la diferencia entre los niveles escolares considerados no ha sido tan marcada. El coeficiente de Contingencia obtenido en relación con la variable Curso ha sido de 0.39 (en este caso no puede averiguarse su equivalencia a r porque no hay el mismo número de filas que de columnas en la tabla de contingencia). En la prueba de Seriación no hay diferencias significativas entre Preescolar y EGB.

. **Propiedades aritméticas :**

Los niños de Preescolar presentan diferencias significativas con los de EGB en las cinco propiedades aritméticas consideradas en el estudio. Averiguando el coeficiente de Contingencia entre cada una de ellas y la variable Curso, nos encontramos con que el más alto lo presenta la prueba de **Conmutatividad** (C = 0,448, equivalente a r = 0,824). A continuación se hallan las de **Asociatividad** (C = 0,407, requivalente = 0,759), **Inversión** (C = 0,404, equivalente a r = 0,756), **Compensación** (C = 0,375, r = 0,728), y, por último, la prueba de **Inferencia** (C = 0,359, equivalente a r = 0,712). Por lo tanto, la diferencia mayor entre estos dos cursos se encuentra en la propiedad Conmutativa : de los 24 niños de Preescolar sólo 7 han alcanzado la etapa 3, mientras que lo han hecho 19 de los 24 que forman la muestra de EGB. La menor está en la prueba de Inferencia (la más fácil), donde ya 14 niños preescolares han llegado a la etapa 3 frente a los 22 de EGB.

. **Problemas aritméticos de enunciado verbal utilizando números grandes.**

Se rechaza la hipótesis nula en todos los problemas, excepto en el de Igualación-1. Esto equivale a decir que el grupo de niños de Preescolar difiere significativamente del grupo de EGB en cada uno de los problemas con números grandes excepto en el mencionado. La diferencia es altamente significativa en los problemas **Cambio-5**, **Comparación-2**, **Igualación-5**, **Comparación-3**, **Igualación-4** e **Igualación-3**. Los coeficientes de Contingencia entre la variable Curso y tales problemas, son respectivamente : C = 0,581, que puede traducirse a r = 0,906; C = 0,559 (equivalente a r = 0,889); C = 0,533 (r = 0,868); C = 0,509 (r = 0,848); C = 0,509 (r = 0,848); C = 0,504 (r = 0,844). La diferencia más marcada se encuentra, por tanto, en el problema Cambio-5.

. Problemas aritméticos de enunciado verbal utilizando números pequeños.

Cuando se reduce el tamaño del número, las diferencias entre la muestra de Preescolar y la de EGB son significativas únicamente en los siguientes problemas : **Cambio-5**, **Comparación-3**, **Cambio-3**, **Igualación-5**, **Igualación-4**, **Combinación-2**. En **Cambio-5** la diferencia resulta altamente significativa (p = 0,0001) y el coeficiente de Contingencia entre la variable Curso y este problema ha llegado a ser de 0,6, que corresponde a r = 0,921. Lo han solucionado bien tres niños de Preescolar y ventiuno de EGB (de venticuatro que tiene cada grupo). Los coeficientes hallados en el resto de los problemas donde se encuentran diferencias significativas son, respectivamente, C = 0,389 (r = 0,742), C = 0,434 (r = 0,783), C = 0,433 (r = 0,782), C = 0,432 (r = 0,782), C = 0,359 (r = 0,712).

. Comprensión de términos comparativos :

La diferencia de la distribución de Preescolar y de EGB en cuanto a la comprensión de los términos comparativos, no llega a ser significativa al nivel establecido. En Preescolar, tres niños los comprenden sin explicación, frente a siete niños de EGB.

. Puntuaciones totales alcanzadas en la resolución de los problemas :

Preescolar y EGB difieren significativamente en las puntuaciones totales obtenidas en la solución de problemas con números grandes y con números pequeños. Aplicando la prueba T de Student, en ambos casos la diferencia de medias es altamente significativa (p = 0,0001).

Comparación entre 1º y 2º Preescolar

. **Pruebas piagetianas :**

En las pruebas piagetianas de Inclusión de clases y de Seriación, las distribuciones de los niños de 1º y de 2º de Preescolar han sido idénticas ; en la primera han alcanzado la etapa 3 , dos niños de cada curso y en la segunda, tres. En la prueba de Conservación del número sólo se encuentra en la etapa más avanzada un niño de 1º de Preescolar, la diferencia, por tanto, es muy pequeña y favorable al curso más bajo.

. **Propiedades de la aritmética :**

Los dos cursos de Preescolar sólo difieren significativamente en la prueba de **Inferencia** : cuatro niños de 1º de Preescolar han llegado a la etapa tres frente a diez de 2º. El coeficiente de Contingencia entre la variable curso y la variable Inferencia, ambas dicotómicas, es de 0,452 y equivale a un coeficiente de Pearson de 0,799. En las pruebas de Inversión y Compensación las distribuciones son idénticas en ambos cursos : sólo dos niños de cada uno están en la etapa 3. En Asociatividad sólo un niño de 2º de Preescolar se encuentra en la tercera etapa y en Conmutatividad cinco niños de 2º frente a dos de 1º. Como puede observarse, excepto en el caso de Inferencia, las diferencias, cuando se encuentran, son mínimas.

. **Problemas aritmeticos de enunciado verbal con números grandes.**

Los dos cursos de Preescolar difieren significativamente al nivel establecido (0,05) en ocho de los diecisiete problemas presentados con números grandes. Averiguando el coeficiente de Contingencia entre la variable Curso y cada uno de estos problemas, hemos obtenido los siguientes, ordenados de mayor a menor :

. **Combinación-1** ($C = 0{,}56$, equivalente a $r = 0{,}89$).

. **Cambio-4** (C = 0.555, equivalente a r = 0,886).

. **Igualación-6** (C = 0,555, equivalente ar = 0,886).

. **Comparación-1** (C = 0,505, que equivale a r = 0,845).

. **Igualación-5** (C = 0,5, equivalente a r = 0,841).

. **Cambio-2** (C = 0,469, equivalente a r = 0,814).

. **Cambio-1** (C = 0,452, equivalente a r = 0,799).

. **Cambio-6** (C = 0,452, equivalente a r = 0,799).

En el resto de los problemas no puede rechazarse la hipótesis nula, es decir, los cursos de 1º y 2º de Preescolar no presentan diferencias significativas. La mayor parte de ellos son muy difíciles para los niños de ambos cursos, excepto los problemas de Igualación-1 e Igualación-2 en los que sólo un niño de 2º de Preescolar no es capaz de resolverlos correctamente frente a seis de 1º. En estos casos, si no se aplica la corrección de Yates, puede rechazarse la hipótesis nula al nivel establecido.

. **Problemas aritméticos de enunciado verbal con números pequeños.**

Los cursos de 1º y 2º de Preescolar presentan diferencias significativas en los problemas **Cambio-4, Combinación-1 y Comparación-2.** En los tres casos se ha obtenido la misma distribución : de doce niños de cada curso, los resuelven siete de 1º y todos los de segundo. El coeficiente de Contingencia de estos problemas con la variable Curso ha sido de 0,456, equivalente a r = 0,803. En el resto de los problemas no llega a rechazarse la hipótesis nula, siendo idénticos los resultados obtenidos en uno y otro curso en Igualación-4 (cinco niños de 1º y cinco de 2º lo solucionan bien); la diferencia es mínima en Cambio-2 (casi todos los niños lo solucionan correctamente en ambos cursos) y en Cambio-5 (sólo un niño de 2º y dos de 1º hallan bien la solución).

. Comprensión de términos comparativos :

Los términos comparativos ofrecen una gran dificultad a los niños de Preescolar. Sólo un niño de 1º y dos de 2º alcanzan a comprenderlos sin explicación. La diferencia no es estadisticamente significativa.

. Puntuaciones totales alcanzadas en la resolución de problemas con números grandes :

La prueba t indica que la media obtenida por los niños de 2º de Preescolar en la solución de problemas, cualquiera que sea el tamaño del número, es significativamente mayor que la alcanzada por los de 1º de Preescolar. La diferencia entre medias es más acusada en el caso de los problemas con números grandes ($p=0,003$ frente a $p=0,0137$ en el caso de los problemas con números pequeños). La desviación con respecto a la media es semejante en 1º de Preescolar cuando se utilizan números grandes y números pequeños mientras que en 2º disminuye notablemente con la reducción del tamaño de los números.

<u>Comparación entre 2º de Preescolar y 1º de EGB :</u>

. Pruebas piagetianas.

El grupo de 2º de Preescolar difiere significativamente del grupo de 1º de EGB sólo en la prueba de **Conservación** : ningún niño de 2º de Preescolar ha llegado a la etapa 3 mientras que siete de 1º de EGB ya están en ella. El coeficiente de Contingencia entre esta variable y la variable Curso es de 0,456 que traducido a la r de Pearson resulta ser de 0,803. En Inclusión de clases sólo un niño de 1º de EGB ha alcanzado la etapa 3 frente a dos niños de 2º de Preescolar y en Seriación cuatro niños de 1º de EGB frente a tres de 2º de Preescolar.

. **Propiedades aritméticas :**

No hay diferencias significativas en ninguna de ellas. Los resultados obtenidos por los niños de 2º de Preescolar han sido muy semejantes a los de 1º de EGB y en algún caso (Inferencia) idénticos.

. **Problemas aritméticos de enunciado verbal utilizando números grandes :**

Las diferencias significativas entre estos dos cursos, cuando se utilizan números grandes, se sitúan en los problemas **Cambio-5 e Igualación-4**, que resultan muy difíciles para los niños preescolares : sólo un niño es capaz de resolver tanto uno como otro, mientras que lo hacen más de la mitad de los niños de 1º de EGB (8 y 7 niños respectivamente). El coeficiente de Contingencia entre la variable Curso y los mencionados problemas ha sido: en Cambio-5, C = 0,516 (equivalente a 0,854) y en Igualación-4, C = 0,469 (equivalente a r = 0,814).

. **Problemas aritméticos de enunciado verbal utilizando números pequeños :**

Cuando reducimos el tamaño de los números, las diferencias entre 2º de Preescolar y 1º de EGB en la solución de problemas, disminuyen notablemente. Sólo llega a rechazarse la hipótesis nula en el problema **Cambio-5**, es decir, únicamente en él difieren significativamente estos dos cursos : un niño de 2º de Preescolar lo resuelve frente a nueve de 1º de EGB. Este problema presenta un coeficiente de Contingencia en relación con la variable Curso de 0,56, que equivale a un coeficiente de Pearson de 0,89.

. **Comprensión de términos comparativos :**

La diferencia observada entre 2º de Preescolar y 1º de EGB no alcanza la significatividad estadística al nivel establecido (p = 0,05), siendo favorable al curso de preescolares : dos niños comprenden tales términos sin explicación mientras que ninguno de los de 1º de EGB lo hacen.

. **Puntuaciones totales alcanzadas en la resolución de problemas :**

Cuando consideramos el total de problemas resuelto con corrección, la media obtenida en **1º de EGB** es **significativamente mayor** que la alcanzada en 2º de Preescolar, tanto con números pequeños como con números grandes, tal y como se pone de manifiesto mediante la aplicación de la prueba t. Las desviaciones típicas descienden notablemente en ambos cursos en el caso de utilizar números pequeños.

Comparación de 1º y 2º de EGB :

. **Pruebas piagetianas :**

Los niños de 1º difieren significativamente de los de 2º de EGB, en la prueba de **Inclusión de clases** (p = 0,001 con corrección de continuidad). Sólo un niño de 1º frente a diez de 2º han alcanzado la etapa 3. El coeficiente de contingencia cuando relacionamos este problema con la variable Curso es de 0,601, que traducido a la r de Pearson resulta ser de 0,922. En las otras dos pruebas piagetianas, hay más niños que están en la tercera etapa de 2º de EGB que de 1º , pero las diferencias no llegan a ser estadísticamente significativas.

. **Propiedades de la aritmética :**

No se rechaza la hipótesis nula en ninguno de los casos estudiados. Las diferencias que encontramos entre un curso y otro no llegan a ser significativas, aunque siempre son favorables a 2º de EGB. En el caso de la Compensación, las distribuciones son idénticas : alcanzan la etapa 3 la mitad de los niños de cada curso.

. Problemas aritméticos de enunciado verbal utilizando números grandes :

Las diferencias entre 1º y 2º de EGB sólo alcanzan la significatividad estadistica en el problema de **Comparación-3**. Mientras que todos los niños de 2º lo resuelven, sólo lo hacen cinco de los doce que forman el grupo de 1º. El coeficiente de Contingencia obtenido entre este problema y la variable Curso es de 0,54, equivalente a r = 0,874.

. Problemas aritméticos de enunciado verbal utilizando números pequeños :

Las diferencias son muy pequeñas y siempre favorables a 2º de EGB. En ningún caso llegan a ser significativas . La diferencia mayor entre ambos cursos se encuentra en los problemas de Cambio-5 e Igualación-4, donde tres niños de 1º no los resuelven mientras que lo hace la totalidad de los de 2º de EGB.

. Comprensión de términos comparativos :

Siete niños de 2º de EGB y ninguno de los de 1º comprenden tales términos sin explicación. La diferencia resulta ser altamente significativa (p = 0,007 con corrección de continuidad).

. Puntuaciones totales alcanzadas en la resolución de los problemas :

La diferencia de medias obtenidas en 1º y 2º de EGB **son significativas** tanto en en la resolución de problemas con números grandes (t=2,59; p=0,0167), como en la de los problemas que utilizan números pequeños (t=2,253; p=0,0346). La desviación tipica desciende en estos últimos problemas, llegando a ser nula en 2º de EGB, ya que todos los niños obtienen la puntuación máxima.

Comparación de los resultados teniendo en cuenta los distintos niveles de rendimiento.

Los distintos contrastes se han realizado con la prueba de ji-cuadrado, sin perder de vista su limitación en estos casos, debido al escaso número de niños, y la necesidad, por tanto, de corroborar los resultados mediante la prueba de la probabilidad exacta de Fisher

Hemos averiguado qué problemas discriminan mejor los niveles de rendimiento establecidos, en Preescolar y EGB, por los correspondientes profesores. Para ello aplicamos la siguiente fórmula :

$$ID = A\ alto/A\ alto + A\ bajo.$$

Donde: A alto es el número de aciertos en el grupo de alto rendimiento.

A bajo es el número de aciertos en el grupo de bajo nivel.

Comparación entre el nivel alto y el nivel bajo de Preescolar:

Para realizar este contraste hemos considerado a los ocho niños preescolares que, en opinión de sus profesores, tienen un alto rendimiento escolar y a los ocho con el nivel más bajo

. **Pruebas piagetianas** :

La mayor diferencia entre uno y otro grupo se encuentra en la prueba de Seriación : tres niños del grupo alto han llegado a la etapa 3 mientras que ninguno de los del grupo de bajo rendimiento la alcanza. Sin embargo, **no llega a rechazarse la hipótesis nula al nivel establecido.** En las tareas de Conservación y de Inclusión de clases uno y dos niños respectivamente del nivel alto y ninguno de los niños de bajo rendimiento se encuentra en la etapa más avanzada. Las diferencias no alcanzansignificatividad estadística..

. Propiedades de la aritmética :

Aquí la diferencia entre los niveles de alto y de bajo rendimiento se localiza únicamente en la propiedad aritmética de la **Conmutatividad** : ningún niño de bajo rendimiento da muestras de conocerla frente a cinco niños del nivel alto. El coeficiente de Contingencia con la variable rendimiento es de 0,559, que equivale a 0,889. La p de Fisher obtenida (0,012) confirma la significatividad al nivel de confianza del 5%

. Problemas aritméticos de enunciado verbal utilizando números grandes :

Las diferencias significativas entre un nivel y otro de Preescolar se sitúa en los problemas :

- **Comparación 2** : Ningún niño de nivel bajo llega a resolverlo mientras que sí lo hacen siete de nivel alto. El nivel de Contingencia que presenta este problema en relación con la variable nivel de rendimiento es el más alto : de 0,661, equivalente a r = 0,967. El índice de discriminación de este problema con respecto a estos dos grupos es máxima, es decir, igual a 1.

- **Cambio 1** : los ocho niños de nivel alto lo resuelven mientras que sólo lo hacen dos del nivel bajo. El coficiente de Contingencia con respecto a la variable nivel de rendimiento es de 0,612, equivalente a r = 0,93. El índice de discriminación de este problema en relación a estos dos niveles de rendimiento valorados por los profesores es de 0,8.

- **Cambio 6** : Lo resuelven seis niños de nivel alto frente a uno de nivel bajo. El coeficiente de Contingencia con respecto a la variable rendimiento es de 0,533 y equivale a r = 0,868. El índice de discriminación con respecto a estos dos niveles de rendimiento es de 0,86.

- **Igualación 3** : Sólo lo resuelve un niño de nivel bajo mientras que lo hacen seis de nivel alto. El coeficiente de Contingencia con el nivel de rendimiento es de 0,533, equivalente a r = 0,868. Su índice de discriminación del nivel alto y bajo de rendimiento es de 0,86.

La prueba de la probabilidad exacta de Fisher coincide también en destacar como significativas las diferencias en estos problemas.

Los resultados obtenidos por los grupos de nivel alto y bajo en rendimiento son muy próximos, sobre todo, en los problemas Cambio-5, Combinación-2, Comparación-3, Igualación-4, Igualación-5 e Igualación-6. Excepto este último, se trata de los problemas más difíciles para los cursos de Preescolar, de modo que la aproximación tiene lugar por abajo.

En los demás problemas, si no tuviéramos en cuenta la corrección de Yates, llegaría a rechazarse la hipótesis nula. El valor de p en estos casos es de 0,056, por lo que, en rigor estadístico, no puede hablarse de significación al nivel de confianza del 5%.

. **Problemas aritméticos de enunciado verbal utilizando números pequeños :**

Los niños de Preescolar de nivel de rendimiento alto son significativamente superiores a los de nivel bajo en los siguientes problemas con números pequeños :

- **Comparación 3** : Lo resuelven dos niñas de nivel bajo y siete de nivel alto. El coeficiente de Contingencia en relación con la variable nivel de rendimiento es de 0,533, que traducido a la r de

Pearson alcanza un valor de 0,868. El índice de discriminación entre los niños de uno y otro nivel es de 0,78.

- **Combinación 2** : Lo solucionan con corrección siete niños de nivel alto y sólo uno de nivel bajo. El coeficiente de Contingencia con la variable rendimiento es de 0,6, equivalente a r=0,921. El índice de discriminación de ambos grupos es de 0,875.

- **Cambio 3** : Encuentran la respuesta correcta dos niños de nivel bajo frente a siete del alto. El coeficiente de Contingencia con la variable rendimiento es de 0,533, que se corresponde con r=0,868. Este problema tiene menos poder de discriminación que los anteriores : ID=0,778.

En **Combinación 1, Igualación 2, Igualación 5** e **Igualación 6**, si no tuviéramos en cuenta la corrección de continuidad se alcanzaría la significatividad estadística. Mediante la prueba de la probabilidad exacta de Fisher se obtiene en todos ellos excepto en el de Igualación-5, en el que el valor de p es de 0,056.

. Comprensión de términos comparativos :

La diferencia entre el grupo de alto y bajo rendimiento no difieren significativamente en la comprensión de términos comparativos, aunque se aprecia la superioridad del grupo de elevado rendimiento : tres niños del mismo son capaces de comprender sin explicación, mientras que ninguno de los de bajo rendimiento lo es.

. Puntuaciones totales alcanzadas en la resolución de problemas :

La diferencia de medias de los resultados obtenidos en la solución de problemas, tanto cuando utilizan números grandes como cuando utilizan números pequeños, es significativa. Se rechaza en ambos casos la hipótesis nula con un riesgo de error inferior al 0,01. Cabe destacar asimismo el aumento notable de variación con respecto a la media que experimenta el grupo alto cuando se le plantean los problemas con números altos. La desviación típica en el grupo de rendimiento bajo apenas sufre variación con el cambio en el tamaño de los números.

Comparación entre los niveles de alto y de bajo rendimiento de EGB :

. Pruebas piagetianas :

Las diferencias entre ambos niveles no llegan a ser significativas en ninguna de las tareas piagetianas. El análisis de las tablas de contingencia nos indica que en todos los casos hay un mayor número de niños del grupo alto de EGB que ha alcanzado la etapa 3 en las mismas.

. Propiedades de la aritmética :

Los grupos de alto y de bajo rendimiento difieren significativamente en las propiedades de :

- **Inversión** : Los ocho niños del grupo alto están en la etapa 3 frente a sólo un niño de bajo rendimiento. El coeficiente de Contingencia entre esta variable y la variable nivel de rendimiento es de 0,661, que podemos traducir a r = 0,967.

- **Compensación** : Siete niños del grupo de alto rendimiento y uno del de bajo han llegado a la tercera etapa. Esta propiedad alcanza un coeficiente de Contingencia con la variable nivel de rendimiento de 0,6, equivalente a r = 0,921.

- **Conmutatividad** : Los ocho niños de alto rendimiento han alcanzado la etapa más avanzada en esta prueba mientras que sólo tres niños de rendimiento bajo lo han hecho. El coeficiente de Contingencia con el nivel de rendimiento es de 0,59 (r = 0,913).

. Problemas aritméticos de enunciado verbal utilizando números grandes :

La única diferencia significativa hallada entre los niños de EGB de alto rendimiento y los de nivel bajo se sitúa en el problema **Igualación-4** . Este problema ha resultado ser el más difícil para este curso y sólo tres niños de bajo rendimiento escolar llega a solucionarlo mientras que la totalidad de los de mejor rendimiento lo hacen. Tratando de averiguar la relación entre este problema y el nivel de rendimiento, nos encontramos con un coeficiente de Contingencia de 0,559, que equivale a una r de Pearson de 0,889.

. Problemas aritméticos de enunciado verbal utilizando números pequeños :

En la mayor parte de los problemas con números pequeños se ha alcanzado en este curso el máximo de corrección, no encontrando por tanto, ninguna diferencia cuantitativa en las respuestas de los niños de alto y de bajo rendimiento. Las únicas diferencias entre ambos niveles se sitúan en los siguientes problemas : Cambio-5, Combinación-2, Comparación-1, Comparación-3, Igualación-3 e Igualación-4. Estos problemas han resultado ser los más difíciles para este curso, situándose los fallos sólo en el grupo de bajo rendimiento. De todos modos, **en ningún caso llega a rechazarse la hipótesis nula**. Los indices de discriminación de tales problemas con respecto a los niveles de bajo y de alto rendimiento son siempre inferiores a 0,65, valor que suele tomarse como mínimo para considerar que una prueba es discriminativa.

. Comprensión de términos comparativos :

Los grupos de rendimiento alto y bajo de EGB **no difieren significativamente** en la comprensión de los términos comparativos. Los resultados son muy similares : tres niños del grupo alto comprenden sin explicación frente a dos niños del grupo de bajo rendimiento.

. **Puntuaciones totales alcanzadas en la resolución de problemas :**

Las **diferencias de medias** de las puntuaciones obtenidas en los problemas por los grupos de alto y de bajo rendimiento de EGB, **son significativas**, independientemente de cuál sea el tamaño de los números. Cuando se utilizan números pequeños la diferencia tiende a disminuir debido al efecto techo($t=2,2$, con $p=0,045$ frente a $t=3,23$ con $p=0,0061$). Tanto en un grupo como en otro, la desviación de las puntuaciones con respecto a la media aumenta con el tamaño de los números.

<u>Comparación del nivel alto de Preescolar con el nivel bajo de EGB.</u>

Hemos comparado conjuntamente los resultados obtenidos por los cuatro niños de 1º y los cuatro de 2º de Preescolar de alto rendimiento, según la valoración de sus profesores, con los cuatro niños de 1º y los cuatro de 2º de EGB, que han sido valorados de bajo rendimiento.

. **Pruebas piagetianas :**

Los resultados obtenidos por los niños de nivel alto de 1º y 2º de Preescolar en las pruebas de Inclusión y Seriación son idénticos a los alcanzados por los niños de 1º y 2º de EGB de nivel bajo : dos niños de cada grupo están en la etapa 3. En la tarea de Conservación tres niños del nivel bajo de EGB se encuentran en la etapa más madura frente a sólo un niño preescolar. La diferencia es, pues, favorable al grupo de escolaridad más avanzada, pero no alcanza la significatividad estadística. En conjunto podemos afirmar que en este apartado **los resultados han sido muy similares.**

. Propiedades de la aritmética :

Ocurre lo mismo que acabamos de mencionar. En las pruebas de Inferencia e Inversión, los dos grupos alcanzan los mismos resultados : Un niño en la etapa 3 en el primer caso y seis en el segundo. En el resto de las propiedades existen **diferencias** pero **nunca significativas**. En la prueba sobre la Asociatividad es favorable al grupo de bajo rendimiento de EGB mientras que en Compensación y Conmutatividad se aprecia una ligera superioridad en la muestra de preescolares de nivel alto.

. Problemas aritméticos de enunciado verbal utilizando números grandes :

Los resultados en los problemas con números grandes siguen siendo **muy semejantes** en los dos grupos contrastados. En ningún caso se rechaza la hipótesis nula. Las diferencias, cuando existen, son muy pequeñas (de un alumno y, en un caso, de dos) y siempre favorables al grupo de rendimiento bajo de EGB.

. Problemas aritméticos de enunciado verbal utilizando números pequeños :

Las diferencias que presentan los grupos de Preescolar (nivel alto) y EGB (nivel bajo) **no alcanzan la significatividad estadística**. En siete problemas no se ha podido elaborar la tabla de contingencia por haber sido resueltos por la totalidad de los niños (la variable problema sólo tenía un valor). En Cambio 3 y en Igualación 3 la distribución en los dos grupos ha sido la misma : siete niños han hallado la solución correcta en ambos problemas. En los casos de desigualdad, esta es muy pequeña; algunas veces favorable al grupo de bajo rendimiento de EGB (Cambio 4, Cambio 5, Comparación 2, Igualación 4 e Igualación 5), y otras al grupo de rendimiento alto de Preescolar (Combinación 2, Comparación 1 y Comparación 3).

. **Comprensión de los términos comparativos :**

Entre los preescolares de alto rendimiento, tres comprenden sin explicación estos términos frente a dos niños del grupo de bajo rendimiento de EGB. La diferencia es favorable, por lo tanto, a los más pequeños aunque no puede rechazarse su atribución al azar.

. **Puntuaciones totales alcanzadas en la resolución de los problemas.**

La diferencia de medias en la puntuación global de los problemas **no es significativa** ni cuando se utilizan números grandes ni cuando se utilizan números pequeños, aun cuando se aprecia una ligera superioridad en EGB. En los dos grupos las puntuaciones son más homogéneas en el caso de los problemas con números pequeños.

Comparación entre el 25% superior de la muestra de Preescolar y el 25% inferior de la muestra de EGB.

En este contraste no hemos tenido en cuenta la valoración del profesor sino las puntuaciones totales obtenidas en los problemas. Hemos seleccionado el 25% superior de las mismas en el grupo de Preescolar tomado en su conjunto y el 25% inferior en EGB sin tomar en consideración el curso al que pertenecen los niños. De este modo se han formado dos grupos de seis niños cada uno. El primero está constituido por dos niños de 1º de Preescolar (de nivel alto según valoración del profesor) y cuatro de 2º de Preescolar (tres de valoración académica alta y uno de media). El segundo lo integran los cinco niños de 1º de EGB, cuatro considerados por sus profesores como de bajo rendimiento y uno de rendimiento medio, y un niño de 2º del nivel bajo de 2º de EGB. A pesar de la escasez de la muestra así formada, hemos aplicado el test ji-cuadrado, sin perder de vista su limitación en este caso y la necesidad de corroborar los resultados mediante la prueba de la probabilidad exacta de Fisher.

. Pruebas piagetianas :

Los reultados han sido muy semejantes en los dos grupos. **En ningún caso se ha rechazado la hipótesis nula**. En Conservación las distribuciones son idénticas . En Inclusión un niño de los preescolares está en la etapa 3 mientras que ninguno de los del grupo inferior de EGB la alcanza. En Seriación son dos los niños de Preescolar que han llegado a la tercera etapa frente a ninguno de los de EGB aquí estudiados. Es decir, cuando se encuentra alguna diferencia, esta es **favorable a los más pequeños.** La prueba de la probabilidad exacta de Fisher corrobora estos resultados. La p calculada en todos los casos es superior a 0,05, lo que indica que la ocurrencia de distribuciones así pueden atribuirse al azar.

. Propiedades de la aritmética :

Tampoco aquí se encuentran diferencias significativas entre el cuartil superior de Preescolar y el cuartil inferior de EGB. En esto coinciden las pruebas de ji-cuadrado y de la probabilidad exacta de Fisher.

De nuevo las desigualdades que aparecen entre ambas distribuciones son **ventajosas para los preescolares**. Así, en la prueba de Inferencia los seis niños de Preescolar están ya en la etapa 3 cuando sólo cuatro de los mayores han llegado a ella. En Inversión un niño de preescolar se encuentra en la etapa más avanzada frente a ninguno de EGB; en Compensación la relación es de dos preescolares frente a ninguno de EGB y en Conmutatividad de tres frente a uno respectivamente.

. Problemas aritméticos de enunciado verbal utilizando números grandes.

Las **diferencias** observadas entre un grupo y otro **nunca llegan a ser significativas**. Sin embargo, analizando las tablas de contingencia nos encontramos **sistemáticamente con una superioridad** en la muestra de los **más pequeños**. Hay que hacer la salvedad de los problemas Cambio

1, Cambio 2 e Igualación 2 en los que todos los niños responden correctamente. El problema que tiene una mayor capacidad para discriminar estos dos grupos es el de Igualación 4 (ID = 0,75). Hemos aplicado la prueba de la probabilidad exacta a la distribución obtenida en este problema y los resultados son coincidentes con los proporcionados por la técnica ji-cuadrado : Tal distribución puede darse por azar con p = 0,2424.

. **Problemas aritméticos de enunciado verbal utilizando números pequeños :**

En ningún caso puede rechazarse la hipótesis nula, por lo que podemos afirmar que el cuartil superior de Preescolar y el cuartil inferior de EGB **no presenta diferencias significativas**. Sin embargo, cuando las distribuciones de ambos grupos no son coincidentes, lo que ocurre sólo en seis problemas: Cambio 3, Combinación 2, Comparación 1, Comparación 3, Igualación 3 e Igualación 4, las tablas de contingencia indican sistemáticamente **resultados favorables** al grupo de **Preescolar**. En Cambio 5 los dos grupos se igualan en un valor medio (tres respuestas correctas en cada uno) y en el resto la equiparación tiene lugar en el valor máximo (seis respuestas correctas en cada uno). El mayor índice de discriminación en relación con estos dos grupos se encuentra en el problema Igualación 4 (ID = 0,625). La prueba de la probabilidad exacta de Fisher coincide con la de ji-cuadrado en que ni en este problema las diferencias llegan a ser significativas.

. **Comprensión de términos comparativos :**

No podemos hablar de diferencias significativas entre los dos grupos que aquí consideramos, ya que si aplicamos la corrección de Yates no llega a rechazarse la hipótesis nula. Sin embargo, otra vez se revela la **superioridad de los más pequeños**. Entre estos, tres comprenden los términos comparativos sin explicación, cuando no lo hace ningún niño del cuartil inferior de EGB. La prueba de la probabilidad exacta confirma el resultado obtenido a través de ji-cuadrado : nos proporciona una p de

0,09, que no nos permite hablar de significación al nivel de confianza del 5%.

. **Puntuaciones totales alcanzadas en la resolución de problemas :**

En los problemas con **números grandes la diferencia de medias** en las puntuaciones alcanzadas es **altamente significativa** (p=0,0036) y **favorable al grupo de Preescolar**. Cuando se reduce el tamaño de los números, los resultados tienden a igualarse por el efecto techo; en este caso la diferencia, también favorable a los preescolares del cuartil superior, no llega a la significatividad estadística.

Comparación entre los niveles alto, medio y bajo dentro de cada uno de los cursos escolares :

Estos contrastes se han realizado únicamente por medio de la prueba de la probabilidad exacta de Fisher, ya que los grupos comparados son extremadamente pequeños (cuatro niños en cada uno).

. **Pruebas piagetianas :**

A pesar de los resultados superiores obtenidos en el grupo de rendimiento alto frente a los otros dos, no se encuentran diferencias significativas entre los tres niveles, en ninguno de los cursos.

. **Propiedades de la aritmética :**

En **1º** y en **2º** de **Preescolar** y en **2º de EGB**, las diferencias entre los distintos niveles de rendimiento no alcanzan significatividad estadística. En **1º de EGB** el grupo de rendimiento alto difiere significativamente del de bajo rendimiento en **Inversión**, **Compensación** y **Conmutatividad**. En las tres pruebas los cuatro niños de nivel alto han alcanzado la etapa 3 frente a ninguno de los de nivel bajo.

. **Problemas aritméticos de enunciado verbal utilizando números grandes :**

En **1º de Preescolar**, la única diferencia significativa se encuentra en el problema **Cambio 1**, donde todos los de nivel alto y ninguno de los de bajo responden correctamente . Aunque no alcancen la significatividad estadística al nivel prefijado, caben destacar las diferencias halladas en los problemas : Cambio 2, Combinación 1, Comparación 2, Igualación 1, Igualación 2 e Igualación 3. En todos ellos, tres niños de nivel alto los resuelven, mientras que no lo hace ninguno de los de nivel bajo (p de Fisher=0,071).

En **2º de Preescolar** el grupo de nivel alto difiere significativamente del de nivel bajo, en el problema **Comparación-2**. Sin llegar a ser significativa la diferencia es también muy marcada en Comparación 3 (p=0,071).

En **1º de EGB** las diferencias no alcanzan la significatividad estadistica pero podemos resaltar las halladas en los problemas : Cambio 3, Cambio 5, Comparación 3, Igualación 4 e Igualación 5 (los resuelven tres niños de los cuatro de nivel alto y ninguno de los de nivel bajo).

En **2º de EGB** , aunque en ningún caso puede hablarse de significación, la mayor diferencia se encuentra en el problema Igualación 4, que resuelven todos los de nivel alto y medio mientras que fallan en él dos niños de nivel bajo.

. **Problemas aritméticos de enunciado verbal utilizando números pequeños :**

En **1º de Preescolar** las diferencias significativas se encuentran entre los niveles de rendimiento alto y bajo y en los siguientes problemas : **Combinación 1**, **Comparación 1** e **Igualación 2** (los resuelven todos los de rendimiento alto y ninguno de los de bajo). Podemos destacar también, aun sin ser significativas, las diferencias halladas en Cambio 3, Combinación 2, Comparación 3 e Igualación 5 , donde tres niños de nivel alto los resuelven frente a ninguno de nivel bajo, así como las que encontramos en Igualación 1 e Igualación 6 que resuelven cuatro niños de nivel alto y uno de nivel bajo.

En **2º de Preescolar** hallamos diferencia significativa entre los grupos de rendimiento alto y bajo en el problema **Comparación 3.** En Combinación 2 y en Igualación 4, aunque no pueda hablarse de significación, las diferencias son muy marcadas.

En **1º de EGB** no podemos descartar, con un nivel de confianza del 95%, que las diferencias halladas sean debidas al azar. Sin embargo, en el problema de Cambio 5 es muy marcada, siendo la probabilidad exacta de que se de una distribución así es de 0,071.

En **2º de EGB** no se dá ninguna diferencia entre niveles de rendimiento: todos los niños de este curso resuelven correctamente la totalidad de los problemas con números pequeños.

. Comprensión de têrminos comparativos :

No se aprecian diferencias significativas entre los distintos niveles de rendimiento en ninguno de los cursos .

. Puntuaciones totales alcanzadas en la resolución de problemas :

Para averiguar si las diferencias encontradas en las puntuaciones totales obtenidas por los niños pertenecientes a los tres niveles de rendimiento, son lo suficientemente acusadas como para que no puedan ser explicadas por el azar, hemos aplicado la **prueba H de Kruskal-Wallis**. Posteriormente, a través de la **prueba U de Mann-Whitney** comprobamos si tal diferencia es producida por los resultados de un sólo grupo o de varios grupos.

En todos los cursos, excepto en 2º de EGB, las **diferencias** entre los niveles de rendimiento alto, medio y bajo son **significativas.**

Comparación dentro de cada grupo del grado de dificultad de los problemas.

El nivel de dificultad de los distintos problemas queda indicado en el estudio de porcentajes de respuestas correctas presentado con anterioridad.

Aquí vamos a comparar tales porcentajes para comprobar si las diferencias revisten significatividad estadística. Para ello, hemos averiguado la razón crítica Z mediante un método desarrollado por MacNemar. Partiendo de una tabla de 2X2, se obtiene Z a partir de las frecuencias correspondientes a los resultados discordantes en el par de problemas que son objeto de contraste. Si llamamos b y c a estas últimas, calculamos Z del siguiente modo:

$$Z=\sqrt{(b-c)^2/b+c}.$$

En un primer momento se efectuan los contrastes atendiendo al distinto tipo de problema en las dos magnitudes del número, a continuación los que hacen referencia a los resultados obtenidos en los problemas de Comparación con y sin modificar el enunciado, y, por último, se trata de averiguar si el tamaño del número marca diferencias significativas en los resultados de los problemas. Las comparaciones se han realizado en el conjunto de la muestra y en los grupos de Preescolar y EGB separadamente.

Diferencia de dificultad en función del distinto tipo de problemas.

Los valores Z hallados entre las proporciones de respuestas correctas en los distintos problemas, se presentan en las tablas 5.1.15 a 5.1.19 que ofrecemos a continuación. El nivel de significatividad alcanzado en cada caso se expresa mediante asteriscos (uno cuando $p \leq 0{,}05$ y dos cuando $p \leq 0{,}01$).

Tanto para la muestra total como para el grupo de Preescolar se incluyen dos tablas, una correspondiente a los problemas con números grandes y otra a los problemas con números pequeños. Sin embargo, para el grupo de EGB sólo se recogen los resultados de los problemas con números grandes; con números pequeños no lo hemos estimado necesario ya que únicamente hallamos dos problemas (Cambio 5 e Igualación 4) que, siendo los más difíciles, difieren significativamente de todos los demás excepto de Cambio 3, Combinación 2, Comparación 3 e Igualación 3.

Tras la presentación de las mencionadas tablas, y basándonos en los resultados recogidos en ellas, indicamos para cada problema, su dificultad relativa con respecto a los demás, así como el nivel de significatividad alcanzado en las diferencias. El análisis se realiza en la muestra total, Preescolar y EGB, teniendo en cuenta el tamaño de los números utilizados en los problemas.

Tabla 5.1.15: DIFERENCIA DE PROPORCIONES DE RESPUESTAS CORRECTAS* EN LOS PROBLEMAS CON NUMEROS GRANDES. MUESTRA TOTAL

	Cambio 1	Cambio 2	Cambio 3	Cambio 4	Cambio 5	Cambio 6	Combin 1	Combin 2	Compar1	Compar2	Compar3	Igualac 1	Igualac 2	Igualac 3	Igualac 4	Igualac 5	Igualac 6
Cambio 1		0,58	3,16**	1,63	4,24**	2,65**	1	2,09**	1,63	2,03**	4,36**	0,45	1	2,12 *	4,36**	3,46	2,33**
Cambio 2			3,32**	2,24 *	4,36**	2,83**	1,73 *	3,32**	2,24 *	3 **	4,47**	0	1	2,33**	4,47**	3,61**	2,83**
Cambio 3				2,45**	2,53**	1,34	2,53**	0	2,12 *	0,71	3 **	3,05**	* *	1,26	2,71**	0,71	1
Cambio 4					3,74**	1,34	1	2,12	0	1,63	3,07**	1,89 *	2,45**	0,63	3,87**	2,53**	1,34
Cambio 5						3,32**	4 **	2,53**	3,5 **	3,16**	0,33	4,36**	4,47**	3,46**	0,58	1,9 *	2,84**
Cambio 6							1,89 *	1,13	1,13	0,38	3,21**	2,53**	3 **	0,3	3,46**	1,67 *	0
Combin 1								2,53**	0,82	2,12 *	4,12	1,34	2 *	1,63	4,12**	3,16**	1,89**
Combin 2									2,12 *	0,71	2,5 **	3,05**	3,46**	1,26	2,71**	0,71	0,9
Compar 1										1,26	3,64**	2,23 *	2,45**	0,58	3,64**	2,53**	1,34
Compar 2											3,32**	2,71**	3,16**	0,71	3,32**	1,41	0,3
Compar 3												4,26**	4,26**	3,61**	0	2,64**	4,24
Igualac 1													1	2,33 *	4,47**	3,36**	2,83**
Igualac 2														2,83**	4,58**	3,74**	3 **
Igualac 3															3,6 **	1,9 **	0,27
Igualac 4																1,94 *	3 ** 1,39
Igualac 5																	
Igualac 6																	

* Valores Z hallados por el método de MacNemar. El nivel de significatividad se indica mediante asteriscos: * (p<0,05) y ** (p<0,01)

5.1.10: DIFERENCIA DE PROPORCIONES DE RESPUESTAS CORRECTAS* EN LOS PROBLEMAS CON NUMEROS PEQUEÑOS. MUESTRA TOTAL

	Cambio 1	Cambio 2	Cambio 3	Cambio 4	Cambio 5	Cambio 6	Combin 1	Combin 2	Compar 1	Compar 2	Compar 3	Igualac 1	Igualac 2	Igualac 3	Igualac 4	Igualac 5	Igualac 6
Cambio 1		1,41	3,32**	2 *	4,79**	1,73 *	2 *	3,32**	2 *	2 *	3,74**	1,73 *	1,73 *	2,24 *	4 **	2,83**	2 *
Cambio 2			2,71**	0,82	4,58**	0,45	1	3 **	1 *	0,82	3,46**	0,44	0,58	1,13	3,5 **	2,45**	1,41
Cambio 3				2,65**	3,46**	2,83**	2,65**	0	2,65**	2,11 *	1	2,53**	2,83**	1,73 *	1,38	0,9	2,33**
Cambio 4					4,36**	0,44	0	2,65**	0	0	2,88**	0,58	0,58	0,44	3,21**	1,63	0
Cambio 5						4,47**	4,36**	3,21**	4,35**	4,35**	2,49**	4,47**	4,47**	4,24**	2,33**	3,87**	4,35**
Cambio 6							0,57	2,31 *	0,44	0,44	3,32**	0	0	0,82	3,35**	1,66 *	0,37
Combin 1								2,33**	0	0	3,16**	0,58	1	0,45	3 **	1,63	0
Combin 2									2,64**	2,33**	1,34	2,83**	2,83**	1,89 *	1,29	1,13	2,64**
Compar 1										0	3,16**	0,58	1	0,58	3 **	1,63	0
Compar 2											2,89**	1	0,58	0,58	3,21**	1,63	0
Compar 3												3,32**	3,32**	2,5 **	0,53	1,9 *	3,16**
Igualac 1													0	1	3,36**	2,23 *	0,58
Igualac 2														1	3,15**	2,23 *	0,45
Igualac 3															2,67**	1	0,38
Igualac 4																2,31 *	3,21**
Igualac 5																	1,63
Igualac 6																	

* Valores Z hallados por el método de MacNemar. El nivel de significatividad se indica mediante asteriscos: * (p<0,05) y ** (p<0,01)

Tabla 5.1.17: DIFERENCIA DE PROPORCIONES DE RESPUESTAS CORRECTAS* EN LOS PROBLEMAS CON NUMEROS GRANDES. PREESCOLAR

	Cambio 1	Cambio 2	Cambio 3	Cambio 4	Cambio 5	Cambio 6	Combin 1	Combin 2	Compar1	Compar2	Compar3	Igualac 1	Igualac 2	Igualac 3	Igualac 4	Igualac 5	Igualac 6
Cambio 1		1	2,45**	1	3,46**	2 *	0	2,12 *	0,44	2,23 *	3,32**	1,34	1,34	1,63	3,32**	2,83**	1
Cambio 2			2,83**	2 *	3,74**	2,45**	1,41	2,83**	1,73 *	2,64**	3,61**	1	1	2,12 *	3,61**	3,16**	2
Cambio 3				2 *	2,45**	1,41	2,45**	0	2,24 *	0,38	2,24 *	3 **	3 **	0,82	2,24 *	0,82	1'63
Cambio 4					3,16**	1,41	1,41	2 *	1	1,34	3 **	2,24 *	2,24 *	0,71	3 **	2,45**	0
Cambio 5						2,83**	3,46**	2,45**	3,32**	2,65**	0,58	3,87**	3,87**	2,83**	1	1,63	3,16**
Cambio 6							2 *	0,82	1,73 *	0,45	2,64**	2,64**	2,64**	0	2,65**	1,63	1
Combin 1								2,45**	0,58	2,24 *	3,32**	1,73 *	1,73 *	1,63	3,32**	2,83**	1,41
Combin 2									2,24 *	0,45	1,89 *	3 **	3 **	0,82	2,24 *	0,82	1,63
Compar 1										0,82	3,16**	2 *	2 *	1	3,16**	2,65**	0,58
Compar 2											2,45**	2,83**	2,83**	0,45	2,45**	1,34	1,13
Compar 3												3,74**	3,74**	2,65**	0	1,73 *	2,71**
Igualac 1													0	2,65**	3,74**	3,32**	2,24 *
Igualac 2														2,65**	3,74**	3,32**	2,24 *
Igualac 3															2,65**	1,41	0,71
Igualac 4																1,13	3 **
Igualac 5																	2,12 *
Igualac 6																	

* Valores Z hallados por el método de MacNemar. El nivel de significatividad se indica mediante asteriscos: * (p<0,05) y ** (p<0,01)

Tabla 5.1.18: DIFERENCIA DE PROPORCIONES DE RESPUESTAS CORRECTAS* EN LOS PROBLEMAS CON NUMEROS PEQUEÑOS. PREESCOLAR

	Cambio 1	Cambio 2	Cambio 3	Cambio 4	Cambio 5	Cambio 6	Combin 1	Combin 2	Compar1	Compar2	Compar3	Igualac 1	Igualac 2	Igualac 3	Igualac 4	Igualac 5	Igualac 6
Cambio 1		1,41	3,16**	2 *	4,47**	1,73 *	2 *	3 **	2 *	2 *	3,46**	1,73 *	1,73 *	2 *	3,61**	2,83**	2 *
Cambio 2			2,53**	0,82	4,24**	0,45	1	2,65**	1	0,82	3,16**	0,45	0,58	0,82	3,05**	2,45**	1,41
Cambio 3				2,45**	3,16**	2,65**	2,45**	0,38	2,45**	1,9 *	0,71	2,33**	2,65**	1,9 *	0,9	0,63	2,12 *
Cambio 4					4 **	0,45	0	2,24 *	1	0	2,53**	0,58	0,58	0	2,71**	1,63	0
Cambio 5						4,12**	4 **	3,32**	4 **	4 **	2,53**	4,12**	4,12**	4 **	2,65**	3,46**	4 **
Cambio 6							0,58	1,9 *	0,82	0,45	3 **	0	0	0,45	2,89**	1,66 *	0,38
Combin 1								1,89 *	0,44	0	2,83**	0,58	1	0	2,5 *	2 *	0
Combin 2									2,23 *	1,89 *	1,34	2,45**	2,45**	1,89 *	1,15	0,45	2,24 *
Compar 1										0	2,82**	0,57	1	0	2,49**	1,63	0
Compar 2											2,53**	1	0,58	0	2,71**	2 *	0
Compar 3												3 **	3 **	2,53**	0,3	1,41	2,83**
Igualac 1													0	0,58	2,89**	2,24 *	0,45
Igualac 2														0,58	2,67**	2,24 *	0,58
Igualac 3															2,5 **	1,41	0
Igualac 4																1,66 *	2,71**
Igualac 5																	1,63
Igualac 6																	

* Valores Z hallados por el método de MacNemar. El nivel de significatividad se indica mediante asteriscos. * (p<0,05) y ** (p<0,01)

Tabla 5.1.19: DIFERENCIA DE PROPORCIONES DE RESPUESTAS CORRECTAS* EN LOS PROBLEMAS CON NUMEROS GRANDES. EGB

	Cambio 1	Cambio 2	Cambio 3	Cambio 4	Cambio 5	Cambio 6	Combin 1	Combin 2	Compar1	Compar2	Compar3	Igualac 1	Igualac 2	Igualac 3	Igualac 4	Igualac 5	Igualac 6
Cambio 1		0	1,73 *	1	2,24 *	1,41	1	1,73 *	1,41	1,41	2,64**	1	0	1	2,65**	1,73 *	1,73 *
Cambio 2			1,73 *	1	2,24 *	1,41	1	1,73 *	1,41	1,41	2,64**	1	0	1	2,64**	1,73 *	1,73 *
Cambio 3				1,41	1	0,58	1	0	0,58	1	2 *	1	1,73 *	1	1,63	0	0,58
Cambio 4					2 *	0,58	0	1	0,58	1	2,45**	0	1	0	2,45**	1	1,73 *
Cambio 5						1,73 *	2 *	1	1,34	1,73 *	0,82	2 *	2,24 *	2 *	1,41	1	0,45
Cambio 6							0,58	1	0	0	1,89 *	0,58	1,41	0,58	2,24 *	0,58	0,82
Combin 1								1	0,58	0,58	2,45**	0	1	0	2,45**	1,41	1,34
Combin 2									0,58	0,58	1,63	1	1,73	1	1,63	0	0,45
Compar 1										0	1,89 *	1	1,41	0,58	1,89 *	0,58	1,41
Compar 2											2,24 *	0,58	1,41	0,58	2,24 *	0,58	1
Compar 3												2,12 *	2,64**	2,45**	0	2 *	1,13
Igualac 1													1	0	2,45**	1	1,73 *
Igualac 2														1	2,65**	1,73 *	1,73 *
Igualac 3															2,45**	1,41	1,34
Igualac 4																1,63	1,13
Igualac 5																	0,45
Igualac 6																	

Valores Z hallados por el método de MacNemar. El nivel de significatividad se indica mediante asteriscos: * ($p<0,05$) y ** ($p<0,01$)

MUESTRA TOTAL

Problemas con números grandes

Problema	más fácil que	más difícil que	sin dif. significativa
Cambio 1	Cambio 3** Cambio 5** Cambio 6** Combinación 2** Comparación 2** Comparación 3** Igualación 4** Igualación 5** Igualación 6**		Cambio 2 Cambio 4 Combinación 1 Comparación 1 Igualación 1 Igualación 2
Cambio 2	Cambio 3** Cambio 4* Cambio 5** Cambio 6** Combinación 1* Combinación 2** Comparación 1* Comparación 2** Comparación 3** Igualación 3** Igualación 4** Igualación 5** Igualación 6**		Cambio 1 Igualación 1 Igualación 2
Cambio 3	Cambio 5** Comparación 3** Igualación 4**	Cambio 1** Cambio 2** Cambio 4** Combinación 1** Comparación 1* Igualación 1** Igualación 2**	Cambio 6 Combinación 2 Comparación 2 Igualación 3 Igualación 5 Igualación 6
Cambio 4	Cambio 3** Cambio 5** Combinación 2* Comparación 3** Igualación 4** Igualación 5**	Cambio 2* Igualación 1* Igualación 2**	Cambio 1 Combinación 1 Comparación 1 Comparación 2 Igualación 3 Igualación 6 Cambio 6

MUESTRA TOTAL

Problemas con números grandes

Problema	**más fácil que**	**más difícil que**	**sin dif.significativa**
Cambio 5		Cambio 1** Cambio 2** Cambio 3** Cambio 4** Cambio 6** Combinación 1** Combinación 2** Comparación 1** Comparación 2** Igualación 1** Igualación 2** Igualación 3** Igualación 5* Igualación 6**	Comparación 3 Igualación 4
Cambio 6	Cambio 5** Comparación 3** Igualación 4** Igualación 5*	Cambio 1** Cambio 2** Combinación 1* Igualación 1** Igualación 2**	Cambio 3 Cambio 4 Combinación 2 Comparación 1 Comparación 2 Igualación 3 Igualación 6
Combinación 1	Cambio 3** Cambio 5** Cambio 6* Combinación 2** Comparación 2* Comparación 3** Igualación 4** Igualación 5** Igualación 6*	Cambio 2* Igualación 2*	Cambio 1 Comparación 1 Igualación 1 Igualación 3
Combinación 2	Cambio 5** Comparación 3** Igualación 4**	Cambio 1** Cambio 2** Cambio 4* Combinación 1** Comparación 1* Igualación 1** Igualación 2**	Cambio 3 Cambio 6 Comparación 2 Igualación 3 Igualación 5 Igualación 6

MUESTRA TOTAL: Problemas con números grandes

Problema	más fácil que	más difícil que	sin dif.significativa
Comparación 1	Cambio 3* Cambio 5** Combinación 2* Comparación 3* Igualación 4** Igualación 5**	Cambio 2* Igualación 1* Igualación 2**	Cambio 1 Cambio 4 Cambio 6 Combinación 1 Comparación 2 Igualación 3 Igualación 6
Comparación 2	Cambio 5** Comparación 3** Igualación 4**	Cambio 1** Cambio 2** Igualación 1** Igualación **2 Combinación 1*	Cambio 3 Cambio 4 Cambio 6 Combinación 2 Comparación 1 Igualación 3 Igualación 5 Igualación 6
Comparación 3		Cambio 1** Cambio 2** Cambio 3** Cambio 4** Cambio 6** Combinación 1** Combinación 2** Comparación 1** Comparación 2** Igualación 1** Igualación 2** Igualación 3** Igualación 5** Igualación 6**	Cambio 5 Igualación 4
Igualación 1	Cambio 3** Cambio 4* Cambio 5** Cambio 6** Combinación 2** Comparación 1* Comparación 2** Comparación 3** Igualación 3** Igualación 4** Igualación 5** Igualación 6**		Cambio 1 Cambio 2 Combinación 1 Igualación 2

MUESTRA TOTAL

Problemas con números grandes

Problema	**más fácil que**	**más difícil que**	**sin dif.significativa**
Igualación 2	Cambio 3**		Cambio 1
	Cambio 4**		Cambio 2
	Cambio 5**		Igualación 1
	Cambio 6**		
	Combinación 1*		
	Combinación 2**		
	Comparación 1**		
	Comparación 2**		
	Comparación 3**		
	Igualación 3**		
	Igualación 4**		
	Igualación 5**		
	Igualación 6**		
Igualación 3	Cambio 5**	Cambio 1*	Cambio 3
	Comparación 3	Cambio 2**	Cambio 4
	Igualación 4**	Igualación 1**	Cambio 6
	Igualación 5*	Igualación 2**	Combinación 1
			Combinación 2
			Comparación 1
			Comparación 2
			Igualación 6
Igualación 4		Cambio 1**	Cambio 5
		Cambio 2**	Comparación 3
		Cambio 3**	
		Cambio 4**	
		Cambio 6**	
		Combinación 1**	
		Combinación 2**	
		Comparación 1**	
		Comparación 2**	
		Igualación 1**	
		Igualación 2**	
		Igualación 3**	
		Igualación 5*	
		Igualación 6**	

MUESTRA TOTAL

Problemas con números grandes

Problema	más fácil que	más difícil que	sin dif.significativa
Igualación 5	Cambio 5* Comparación 3** Igualación 4*	Cambio 1** Cambio 2** Cambio 4** Cambio 6* Combinación 1** Comparación 1** Comparación 2* Igualación 1** Igualación 2** Igualación 3*	Cambio 3 Combinación 2 Igualación 6
Igualación 6	Cambio 5** Comparación 3** Igualación 4**	Cambio 1** Cambio 2** Combinación 1* Igualación 1** Igualación 2**	Cambio 3 Cambio 4 Cambio 6 Combinación 2 Comparación 1 Comparación 2 Igualación 3** Igualación 5

MUESTRA TOTAL

Problemas con números pequeños

Problema	**más fácil que**	**más difícil que**	**sin dif.significativa**
Cambio 1	Cambio 3** Cambio 4* Cambio 5** Cambio 6* Combinación 1* Combinación 2** Comparación 1* Comparación 2* Comparación 3** Igualación 1* Igualación 2* Igualación 3* Igualación 4** Igualación 5** Igualación 6*		Cambio 2
Cambio 2	Cambio 3** Cambio 5** Combinación 2** Comparación 3** Igualación 4** Igualación 5**		Cambio 1 Cambio 4 Cambio 6 Combinación 1 Comparación 1 Comparación 2 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 6
Cambio 3	Cambio 5**	Cambio 1** Cambio 2** Cambio 4** Cambio 6** Combinación 1** Comparación 1** Comparación 2* Igualación 1** Igualación 2** Igualación 3* Igualación 6**	Combinación 2 Comparación 3 Igualación 4 Igualación 5

MUESTRA TOTAL

Problemas con números pequeños

Problema	más fácil que	más difícil que	sin dif.significativa
Cambio 4	Cambio 3** Cambio 5** Combinación 2** Comparación 3** Igualación 4**	Cambio 1*	Cambio 2 Cambio 6 Combinación 1 Comparación 1 Comparación 2 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 5 Igualación 6
Cambio 5		Cambio 1** Cambio 2** Cambio 3** Cambio 4** Cambio 6** Combinación 1** Combinación 2** Comparación 1** Comparación 2** Comparación 3** Igualación 1** Igualación 2** Igualación 3** Igualación 4** Igualación 5** Igualación 6**	
Cambio 6	Cambio 3** Cambio 5** Combinación 2* Comparación 3** Igualación 4** Igualación 5*	Cambio 1*	Cambio 2 Cambio 4 Combinación 1 Comparación 1 Comparación 2 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 6

MUESTRA TOTAL

Problemas con números pequeños

Problema	más fácil que	más difícil que	sin dif.significativa
Combinación 1	Cambio 3** Cambio 5** Combinación 2** Comparación 3** Igualación 4**	Cambio 1*	Cambio 2 Cambio 4 Cambio 6 Comparación 1 Comparación 2 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 5 Igualación 6
Combinación 2	Cambio 5	Cambio 1** Cambio 2** Cambio 4 Cambio 6* Combinación 1** Comparación 1** Comparación 2** Igualación 1** Igualación 2** Igualación 3* Igualación 6**	Cambio 3 Comparación 3 Igualación 4 Igualación 5
Comparación 1	Cambio 3** Cambio 5** Combinación 2** Comparación 3** Igualación 4**	Cambio 1*	Cambio 2 Cambio 4 Cambio 6 Combinación 1 Comparación 2 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 5

MUESTRA TOTAL

Problemas con números pequeños

Problema	**más fácil que**	**más difícil que**	**sin dif.significativa**
Comparación 2	Cambio 3* Cambio 5** Combinación 2 Comparación 3** Igualación 4**	Cambio 1*	Igualación 6 Cambio 2 Cambio 4 Cambio 6 Combinación 1 Comparación 1 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 5 Igualación 6
Comparación 3	Cambio 5**	Cambio 1** Cambio 2** Cambio 4** Cambio 6** Combinación 1** Comparación 1** Comparación 2** Igualación 1** Igualación 2** Igualación 3** Igualación 5* Igualación 6**	Cambio 3 Combinación 2 Igualación 4
Igualación 1	Cambio 3** Cambio 5** Combinación 2** Comparación 3 Igualación 4** Igualación 5*	Cambio 1*	Cambio 2 Cambio 4 Cambio 6 Combinación 1 Comparación 1 Comparación 2 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 6

MUESTRA TOTAL

Problemas con números pequeños

Problema	más fácil que	más difícil que	sin dif.significativa
	Cambio 3**	Cambio 1*	Cambio 2
	Cambio 5**		Cambio 4
	Combinación 2**		Cambio 6
	Comparación 3**		Combinación 1
Igualación 2	Igualación 4**		Comparación 1
	Igualación 5*		Comparación 2
			Igualación 1
			Igualación 3
			Igualación 6
	Cambio 3*	Cambio 1*	Cambio 2
	Cambio 5**		Cambio 4
	Combinación 2*		Cambio 6
	Comparación 3**		Combinación 1
Igualación 3	Igualación 4**		Comparación 1
			Comparación 2
			Igualación 1
			Igualación 2
			Igualación 5
			Igualación 6
	Cambio 5**	Cambio 1**	Cambio 3
		Cambio 2**	Combinación 2
		Cambio 4**	Comparación 3
		Cambio 6**	
		Combinación 1**	
Igualación 4		Comparación 1**	
		Comparación 2**	
		Igualación 1**	
		Igualación 2**	
		Igualación 3**	
		Igualación 5*	
		Igualación 6**	

<u>MUESTRA TOTAL</u>

Problemas con números pequeños

Problema	más fácil que	más difícil que	sin dif.significativa
Igualación 5	Cambio 5** Comparación 3* Igualación 4*	Cambio 1** Cambio 2** Cambio 6* Igualación 1* Igualación 2*	Cambio 3 Cambio 4 Combinación 1 Combinación 2 Comparación 1 Comparación 2 Igualación 3 Igualación 6
Igualación 6	Cambio 3** Cambio 5** Combinación 2 Comparación 3 Igualación 4	Cambio 1*	Cambio 2 Cambio 4 Cambio 6 Combinación 1 Comparación 1 Comparación 2 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 5

PREESCOLAR

Problemas con números grandes

Problema	más fácil que	más difícil que	sin dif.significativa
Cambio 1	Cambio 3** Cambio 5** Cambio 6* Combinación 2 Comparación 2* Comparación 3** Igualación 4** Igualación 5**		Cambio 2 Cambio 4 Combinación 1 Comparación 1 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 6
Cambio 2	Cambio 3** Cambio 4* Cambio 5** Cambio 6** Combinación 2** Comparación 1* Comparación 2** Comparación 3** Igualación 3* Igualación 4** Igualación 5** Igualación 6*		Cambio 1 Combinación 1 Igualación 1 Igualación 2
Cambio 3	Cambio 5** Comparación 3* Igualación 4*	Cambio 1** Cambio 2** Cambio 4* Combinación 1** Comparación 1* Igualación 1** Igualación 2**	Cambio 6 Combinación 2 Comparación 2 Igualación 3 Igualación 5 Igualación 6
Cambio 4	Cambio 3* Cambio 5** Combinación 2* Comparación 3** Igualación 4** Igualación 5**	Cambio 2* Igualación 1* Igualación 2*	Cambio 1 Cambio 6 Combinación 1 Comparación 1 Comparación 2 Igualación 3 Igualación 6

PREESCOLAR: Problemas con números grandes

Problema	más fácil que	más difícil que	sin dif.significativa
Cambio 5		Cambio 1** Cambio 2** Cambio 3** Cambio 4** Cambio 6** Combinación 1** Combinación 2** Comparación 1** Comparación 2** Igualación 1** Igualación 2** Igualación 3** Igualación 6**	Comparación 3 Igualación 4 Igualación 5
Cambio 6	Cambio 5** Comparación 3 Igualación 4**	Cambio 1* Cambio 2** Combinación 1* Comparación 1 Igualación 1** Igualación 2**	Cambio 3 Cambio 4 Combinación 2 Comparación 2 Igualación 3 Igualación 5 Igualación 6
Combinación 1	Cambio 3** Cambio 5** Cambio 6* Combinación 2** Comparación 2* Comparación 3** Igualación 4** Igualación 5**	Igualación 1* Igualación 2*	Cambio 1 Cambio 2 Cambio 4 Comparación 1 Igualación 3 Igualación 6
Combinación 2	Cambio 5** Comparación 3* Igualación 4*	Cambio 1* Cambio 2** Cambio 4* Combinación 1** Comparación 1* Igualación 1** Igualación 2*	Cambio 3 Cambio 6 Comparación 2 Igualación 3 Igualación 5 Igualación 6

PREESCOLAR

Problemas con números grandes

Problema	más fácil que	más difícil que	sin dif.significativa
Comparación 1	Cambio 3* Cambio 5** Cambio 6* Combinación 2* Comparación 3** Igualación 4** Igualación 5**	Cambio 2* Igualación 1* Igualación 2*	Cambio 1 Cambio 4 Combinación 1 Comparación 2 Igualación 3 Igualación 6
Comparación 2	Cambio 5** Comparación 3** Igualación 4**	Cambio 1* Cambio 2** Combinación 1* Igualación 1** Igualación 2**	Cambio 3 Cambio 4 Cambio 6 Combinación 2 Comparación 1 Igualación 3 Igualación 5 Igualación 6
Comparación 3		Cambio 1** Cambio 2** Cambio 3* Cambio 4** Cambio 6** Combinación 1** Combinación 2* Comparación 1** Comparación 2** Igualación 1** Igualación 2** Igualación 3** Igualación 5* Igualación 6**	Cambio 5 Igualación 4

PREESCOLAR

Problemas con números grandes

Problema	más fácil que	más difícil que	sin dif.significativa
Igualación 1	Cambio 3** Cambio 4* Cambio 5** Cambio 6** Combinación 1* Combinación 2** Comparación 1* Comparación 2** Comparación 3** Igualación 3** Igualación 4** Igualación 5** Igualación 6*		Cambio 1 Cambio 2 Igualación 2
Igualación 2	Cambio 3** Cambio 4* Cambio 5** Cambio 6** Combinación 1* Combinación 2** Comparación 1* Comparación 2** Comparación 3** Igualación 3** Igualación 4** Igualación 5** Igualación 6*		Cambio 1 Cambio 2 Igualación 1
Igualación 3	Cambio 5** Comparación 3** Igualación 4**	Cambio 2* Igualación 1** Igualación 2**	Cambio 1 Cambio 3 Cambio 4 Cambio 6 Combinación 1 Combinación 2 Comparación 1 Comparación 2 Igualación 5 Igualación 6

PREESCOLAR

Problemas con números grandes

Problema	más fácil que	más difícil que	sin dif.significativa
Igualación 4		Cambio 1**	Cambio 5
		Cambio 2**	Comparación 3
		Cambio 3*	Igualación 5
		Cambio 4**	
		Cambio 6**	
		Combinación 1**	
		Combinación 2*	
		Comparación 1**	
		Comparación 2**	
		Igualación 1**	
		Igualación 2**	
		Igualación 3**	
		Igualación 6**	
Igualación 5	Comparación 3*	Cambio 1**	Cambio 3
		Cambio 2**	Cambio 5
		Cambio 4**	Cambio 6
		Combinación 1**	Combinación 2
		Comparación 1**	Comparación 2
		Igualación 1**	Igualación 3
		Igualación 2**	Igualación 4
		Igualación 6*	
Igualación 6	Cambio 5**	Cambio 2*	Cambio 1
	Comparación 3**	Igualación 1*	Cambio 3
	Igualación 4**	Igualación 2*	Cambio 4
	Igualación 5*		Cambio 6
			Combinación 1
			Combinación 2
			Comparación 1
			Comparación 2
			Igualación 3

<u>PREESCOLAR</u>

Problemas con números pequeños

Problema	**más fácil que**	**más difícil que**	**sin dif.significativa**
Cambio 1	Cambio 3** Cambio 4* Cambio 5** Cambio 6* Combinación 1* Combinación 2** Comparación 1* Comparación 2* Comparación 3** Igualación 1* Igualación 2* Igualación 3* Igualación 4** Igualación 5** Igualación 6*		Cambio 2
Cambio 2	Cambio 3** Cambio 5** Combinación 2** Comparación 3** Igualación 4** Igualación 5**		Cambio 1 Cambio 4 Cambio 6 Combinación 1 Comparación 1 Comparación 2 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 6
Cambio 3	Cambio 5**	Cambio 1** Cambio 2** Cambio 4** Cambio 6** Combinación 1** Comparación 1** Comparación 2* Igualación 1** Igualación 2** Igualación 3* Igualación 6*	Combinación 2 Comparación 3 Igualación 4 Igualación 5

PREESCOLAR

Problemas con números pequeños

Problema	más fácil que	más difícil que	sin dif.significativa
Cambio 4	Cambio 3** Cambio 5** Combinación 2* Comparación 3** Igualación 4**	Cambio 1*	Cambio 2 Cambio 6 Combinación 1 Comparación 1 Comparación 2 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 5 Igualación 6
Cambio 5		Cambio 1** Cambio 2** Cambio 3** Cambio 4** Cambio 6** Combinación 1** Combinación 2** Comparación 1** Comparación 2** Comparación 3** Igualación 1** Igualación 2** Igualación 3** Igualación 4** Igualación 5** Igualación 6**	
Cambio 6	Cambio 3** Cambio 5** Combinación 2* Comparación 3** Igualación 4** Igualación 5*	Cambio 1*	Cambio 2 Cambio 4 Combinación 1 Comparación 1 Comparación 2 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 6

PREESCOLAR

Problemas con números pequeños

Problema	**más fácil que**	**más difícil que**	**sin dif.significativa**
Combinación 1	Cambio 3** Cambio 5** Combinación 2* Comparación 3** Igualación 4** Igualación 5*	Cambio 1*	Cambio 2 Cambio 4 Cambio 6 Comparación 1 Comparación 2 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 6
Combinación 2	Cambio 5**	Cambio 1** Cambio 2** Cambio 4* Cambio 6* Combinación 1* Comparación 1* Comparación 2* Igualación 1** Igualación 2** Igualación 3* Igualación 6*	Cambio 3 Comparación 3 Igualación 4 Igualación 5
Comparación 1	Cambio 3** Cambio 5** Combinación 2* Comparación 3** Igualación 4**	Cambio 1*	Cambio 2 Cambio 4 Cambio 6 Combinación 1 Comparación 2 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 5 Igualación 6

PREESCOLAR

Problemas con números pequeños

Problema	más fácil que	más difícil que	sin dif.significativa
Comparación 2	Cambio 3* Cambio 5** Combinación 2* Comparación 3** Igualación 4** Igualación 5*	Cambio 1*	Cambio 2 Cambio 4 Cambio 6 Combinación 1 Comparación 1 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 6
Comparación 3	Cambio 5**	Cambio 1** Cambio 2** Cambio 4** Cambio 6** Combinación 1** Comparación 1** Comparación 2** Igualación 1** Igualación 2** Igualación 3** Igualación 6**	Cambio 3 Combinación 2 Igualción 4 Igualación 5
Igualación 1	Cambio 3** Cambio 5** Combinación 2** Comparación 3** Igualación 4** Igualación 5*	Cambio 1*	Cambio 2 Cambio 4 Cambio 6 Combinación 1 Comparación 1 Comparación 2 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 6

PREESCOLAR

Problemas con números pequeños

Problema	**más fácil que**	**más difícil que**	**sin dif.significativa**
Igualación 2	Cambio 3**	Cambio 1*	Cambio 2
	Cambio 5**		Cambio 4
	Combinación 2**		Cambio 6
	Comparación 3**		Combinación 1
	Igualación 4**		Comparación 1
	Igualación 5*		Comparación 2
			Igualación 1
			Igualación 3
			Igualación 6
Igualación 3	Cambio 3*	Cambio 1*	Cambio 2
	Cambio 5**		Cambio 4
	Combinación 2*		Cambio 6
	Comparación 3**		Combinación 1
	Igualación 4**		Comparación 1
			Comparación 2
			Igualación 1
			Igualación 2
			Igualación 5
			Igualación 6
Igualación 4	Cambio 5**	Cambio 1**	Cambio 3
		Cambio 2**	Combinación 2
		Cambio 4	Comparación 3
		Cambio 6	
		Combinación 1**	
		Comparación 1**	
		Comparación 2**	
		Igualación 1**	
		Igualación 2**	
		Igualación 3**	
		Igualación 5*	
		Igualación 6**	

PREESCOLAR

Problemas con números pequeños

Problema	más fácil que	más difícil que	sin dif.significativa
	Cambio 5**	Cambio 1**	Cambio 3
	Igualación 4*	Cambio 2**	Cambio 4
Igualación 5		Cambio 6*	Combinación 2
		Combinación 1*	Comparación 1
		Comparación 2*	Comparación 3
		Igualación 1*	Igualación 3
		Igualación 2*	Igualación 6
	Cambio 3*	Cambio 1*	Cambio 2
	Cambio 5**		Cambio 4
	Combinación 2*		Cambio 6
	Comparación 3**		Combinación 1
Igualación 6	Igualación 4**		Comparación 1
			Comparación 2
			Igualación 1
			Igualación 2
			Igualación 3
			Igualación 5

<u>EGB</u>

Problemas con números grandes

Problema	**más fácil que**	**más difícil que**	**sin dif.significativa**
Cambio 1	Cambio 3* Cambio 5* Combinación 2* Comparación 3** Igualación 4** Igualación 5* Igualación 6*		Cambio 2 Cambio 4 Cambio 6 Combinación 1 Comparación 1 Comparación 2 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 3
Cambio 2	Cambio 3* Cambio 5* Combinación 2* Comparación 3** Igualación 4** Igualación 5* Igualación 6*		Cambio 1 Cambio 4 Cambio 6 Combinación 1 Comparación 1 Comparación 2 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 3
Cambio 3	Comparación 3*	Cambio 1* Cambio 2* Igualación 2*	Cambio 4 Cambio 5 Cambio 6 Combinación 1 Combinación 2 Comparación 1 Comparación 2 Igualación 1 Igualación 3 Igualación 4 Igualación 5 Igualación 6

EGB

Problemas con números grandes

Problema	más fácil que	más difícil que	sin dif.significativa
Cambio 4	Cambio 5* Comparación 3** Igualación 4** Igualación 6*		Cambio 1 Cambio 2 Cambio 3 Cambio 6 Combinación 1 Combinación 2 Comparación 1 Comparación 2 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 5
Cambio 5		Cambio 1* Cambio 2* Cambio 4* Igualación 1* Igualación 2* Igualación 3*	Cambio 3 Cambio 6 Combinación 1 Combinación 2 Comparación 1 Comparación 2 Comparación 3 Igualación 4 Igualación 5 Igualación 6
Cambio 6	Cambio 5* Comparación 3* Igualación 4*		Cambio 1 Cambio 2 Cambio 3 Cambio 4 Combinación 1 Combinación 2 Comparación 1 Comparación 2 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 5 Igualación 6

<u>EGB</u>

Problemas con números grandes

Problema	más fácil que	más difícil que	sin dif.significativa
Combinación 1	Cambio 5*		Cambio 1
	Comparación 3**		Cambio 2
	Igualación 4**		Cambio 3
			Cambio 4
			Cambio 6
			Combinación 2
			Comparación 1
			Comparación 2
			Igualación 1
			Igualación 2
			Igualación 3
			Igualación 5
			Igualación 6
Combinación 2		Cambio 1*	Cambio 3
		Cambio 2*	Cambio 4
		Igualación 2*	Cambio 5
			Cambio 6
			Combinación 1
			Comparación 1
			Comparación 2
			Comparación 3
			Igualación 1
			Igualación 3
			Igualación 4
			Igualación 5
			Igualación 6

EGB

Problemas con números grandes

Problema	más fácil que	más difícil que	sin dif.significativa
Comparación 1	Comparación 3* Igualación 4*		Cambio 1 Cambio 2 Cambio 3 Cambio4 Cambio 5 Cambio 6 Combinación 1 Combinación 2 Comparación 2 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 5 Igualación 6
Comparación 2	Cambio 5* Comparación 3* Igualación 4*		Cambio 1 Cambio 2 Cambio 3 Cambio 4 Cambio 6 Combinación 1 Combinación 2 Comparación 1 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 5 Igualación 6

EGB

Problemas con números grandes

Problema	más fácil que	más difícil que	sin dif.significativa
Comparación 3		Cambio 1** Cambio 2** Cambio 3* Cambio 4** Cambio 6* Combinación 1** Comparación 1* Comparación 2* Igualación 1* Igualación 2** Igualación 3** Igualación 5*	Cambio 5 Combinación 2 Igualación 4 Igualación 6
Igualación 1	Cambio 5* Comparación 3 Igualación 4** Igualación 6*		Cambio 1 Cambio 2 Cambio 3 Cambio 4 Cambio 6 Combinación 1 Combinación 2 Comparación 1 Comparación 2 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 5
Igualación 2	Cambio 3* Cambio 5* Combinación 2* Comparación 3** Igualación 4** Igualación 5* Igualación 6*		Cambio 1 Cambio 2 Cambio 4 Cambio 6 Combinación 1 Comparación 1 Comparación 2 Igualación 1 Igualación 3

EGB

Problemas con números grandes

Problema	más fácil que	más difícil que	sin dif.significativa
Igualación 3	Cambio 5* Comparación 3** Igualación 4**		Cambio 1 Cambio 2 Cambio 3 Cambio 4 Cambio 6 Combinación 1 Combinación 2 Comparación 1 Comparación 2 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 5 Igualación 6
Igualación 4		Cambio 1** Cambio 2** Cambio 4** Cambio 6 Combinación 1** Comparación 1* Comparación 2* Igualación 1** Igualación 2** Igualación 3**	Cambio 3 Cambio 5 Combinación 2 Comparación 3 Igualación 5 Igualación 6

EGB

Problemas con números grandes

Problema	más fácil que	más difícil que	sin dif.significativa
Igualación 5	Comparación 3*	Cambio 1* Cambio 2* Igualación 2	Cambio 3 Cambio 4 Cambio 5 Cambio 6 Combinación 1 Combinación 2 Comparación 1 Comparación 2 Igualación 1 Igualación 3 Igualación 4 Igualación 6
Igualación 6		Cambio 1* Cambio 2* Cambio 4* Igualación 1* Igualación 2*	Cambio 3 Cambio 5 Cambio 6 Combinación 1 Combinación 2 Comparación 1 Comparación 2 Comparación 3 Igualación 3 Igualación 4 Igualación 5

EGB

Problemas con números pequeños

Problema	más fácil que	más difícil que	sin dif.significativa
	Cambio 5*		Cambio 2
	Igualación 4*		Cambio 3
			Cambio 4
			Cambio 6
			Combinación 1
			Combinación 2
Cambio 1			Comparación 1
			Comparación 2
			Comparación 3
			Igualación 1
			Igualación 2
			Igualación 3
			Igualación 5
			Igualación 6
	Cambio 5*		Cambio 1
	Igualación 4		Cambio 3
			Cambio 4
			Cambio 6
			Combinación 1
			Combinación 2
Cambio 2			Comparación 1
			Comparación 3
			Igualación 1
			Igualación 2
			Igualación 3
			Igualación 5
			Igualación 6

<u>EGB</u>

Problemas con números pequeños

Problema	**más fácil que**	**más difícil que**	**sin dif.significativa**
Cambio 3			Cambio 1 Cambio 2 Cambio 4 Cambio 5 Cambio 6 Combinación 1 Combinación 2 Comparación 1 Comparación 2 Comparación 3 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 4 Igualación 5 Igualación 6
Cambio 4	Cambio 5* Igualación 4*		Cambio 1 Cambio 2 Cambio 3 Cambio 6 Combinación 1 Combinación 2 Comparación 1 Comparación 2 Comparación 3 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 5 Igualación 6

EGB

Problemas con números pequeños

Problema	más fácil que	más difícil que	sin dif.significativa
Cambio 5		Cambio 1* Cambio 2* Cambio 4* Cambio 6* Combinación 1* Comparación 1* Comparación 2* Igualación 1* Igualación 2* Igualación 5* Igualación 6*	Cambio 3 Combinación 2 Comparación 3 Igualación 3 Igualación 4
Cambio 6	Cambio 5* Igualación 4*		Cambio 1 Cambio 2 Cambio 3 Cambio 4 Combinación 1 Combinación 2 Comparación 1 Comparación 2 Comparación 3 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 5 Igualación 6

<u>EGB</u>

Problemas con números pequeños

Problema	más fácil que	más difícil que	sin dif.significativa
Combinación 1	Cambio 5* Igualación 4*		Cambio 1 Cambio 2 Cambio 3 Cambio 4 Cambio 6 Combinación 2 Comparación 1 Comparación 2 Comparación 3 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 5 Igualación 6
Combinación 2	Cambio 5* Igualación 4*		Cambio 1 Cambio 2 Cambio 3 Cambio 4 Cambio 6 Combinación 1 Comparación 1 Comparación 2 Comparación 3 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 5 Igualación 6

<u>EGB</u>

Problemas con números pequeños

Problema	más fácil que	más difícil que	sin dif.significativa
Comparación 1	Cambio 5* Igualación 4*		Cambio 1 Cambio 2 Cambio 3 Cambio 4 Cambio 6 Combinación 1 Combinación 2 Comparación 2 Comparación 3 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 5 Igualación 6
Comparación 2	Cambio 5* Igualación 4*		Cambio 1 Cambio 2 Cambio 3 Cambio 4 Cambio 6 Combinación 1 Combinación 2 Comparación 1 Comparación 3 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 5 Igualación 6

EGB

Problemas con números pequeños

Problema	más fácil que	más difícil que	sin dif.significativa
Comparación 3			Cambio 1 Cambio 2 Cambio 3 Cambio 4 Cambio 5 Cambio 6 Combinación 1 Combinación 2 Comparación 1 Comparación 2 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 4 Igualación 5 Igualación 6
Igualación 1	Cambio 5* Igualación 4*		Cambio 1 Cambio 2 Cambio 3 Cambio 4 Cambio 6 Combinación 1 Combinación 2 Comparación 1 Comparación 2 Comparación 3 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 5 Igualación 6

EGB

Problemas con números pequeños

Problema	más fácil que	más difícil que	sin dif.significativa
Igualación 2	Cambio 5* Igualación 4*		Cambio 1 Cambio 2 Cambio 3 Cambio 4 Cambio 6 Combinación 2 Comparación 1 Comparación 2 Comparación 3 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 3 Igualación 5 Igualación 6
Igualación 3			Cambio 1 Cambio 2 Cambio 3 Cambio 4 Cambio 5 Cambio 6 Combinación 1 Combinación 2 Comparación 1 Comparación 2 Comparación 3 Igualación 1 Igualación 2 Igualación 4 Igualación 5 Igualación 6

EGB: Problemas con números pequeños

Problema	más fácil que	más difícil que	sin dif.significativa
Igualación 4		Cambio 1*	Cambio 3
		Cambio 2*	Cambio 5
		Cambio 4*	Combinación 2
		Cambio 6*	Comparación 3
		Combinación 1*	Igualación 3
		Comparación 1*	
		Comparación 2*	
		Igualación 1*	
		Igualación 2*	
		Igualación 5*	
		Igualación 6*	
Igualación 5	Cambio 5*		Cambio 1
	Igualación 4*		Cambio 2
			Cambio 3
			Cambio 4
			Cambio 6
			Combinación 1
			Combinación 2
			Comparación 1
			Comparación 2
			Comparación 3
			Igualación 1
			Igualación 2
			Igualación 3
			Igualación 6
Igualación 6	Cambio 5*		Cambio 1
	Igualación 4*		Cambio 2
			Cambio 3
			Cambio 4
			Cambio 6
			Combinación 1
			Combinación 2
			Comparación 1
			Comparación 2
			Comparación 3
			Igualación 1
			Igualación 2
			Igualación 3
			Igualación 5

Diferencia de dificultad de los problemas comparativos cuando se plantean con y sin explicación

Hemos hallado asimismo la razón crítica de la diferencia de proporciones de respuestas correctas a los tres problemas comparativos cuando se plantean del modo habitual y modificando el enunciado de manera que se omitan los términos de comparación. En el grupo de Preescolar se tienen en cuenta únicamente los datos de los problemas con números pequeños para evitar la incidencia de la dificultad engendrada por el tamaño mayor del número, y en EGB con números grandes, ya que han sido los primeros en presentarse. En todos los casos, y tal como puede observarse a continuación, los valores Z encontrados indican diferencias altamente significativas ($p<0{,}01$):

PREESCOLAR (Problemas con números pequeños)

Comparación 1 $Z=3{,}74^{**}$

Comparación 2 $Z=3.87^{**}$

Comparación 3 $Z=2{,}44^{**}$

EGB (Problemas con números grandes)

Comparación 1 $Z=3.60^{**}$

Comparación 2 $Z=3{,}87^{**}$

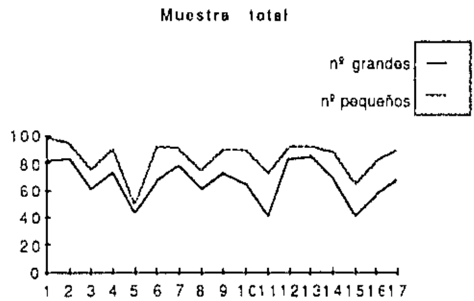
Comparación 3 $Z=2{,}64^{**}$

Diferencia de dificultad en función del tamaño de los números.

Vamos ahora a comprobar en qué medida el tamaño de los números es una variable influyente en el nivel de dificultad de cada uno de los problemas. Más concretamente, tratamos de averiguar para cada uno de ellos, si la reducción de la magnitud del número los simplifica de un modo significativo. Como en el caso anterior, hemos estudiado la significación de la diferencia de proporciones mediante el procedimiento propuesto por MacNemar, realizando los cálculos en el conjunto de la muestra y en los grupos de Preescolar y EGB por separado. En cada caso partimos del gráfico correspondiente que expresa la diferencia de porcentajes de respuestas correctas obtenidas con números grandes y con números pequeños, indicando posteriormente en qué problemas el tamaño del número introduce diferencias significativas y, en su caso, el nivel de significatividad.

MUESTRA TOTAL

Gráfico 5.1.42 : Representación gráfica de los porcentajes de respuestas correctas en cada uno de los problemas utilizando números grandes y números pequeños

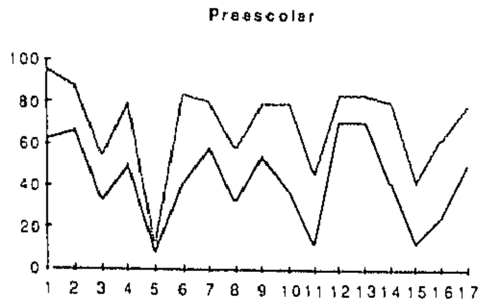


Hallando la razón critica Z, hemos encontrado que con números pequeños la proporción de respuestas correctas es significativamente mayor que con números grandes en todos los problemas. Atendiendo al nivel de significatividad estadística alcanzada podemos distribuir del siguiente modo los problemas:

nivel de significación del 95% (*)	**nivel de significación del 99% (**)**	
Cambio 2 (Z=2,23)	Cambio 1 (Z=2,83)	Comparación 2 (Z=3,46)
Cambio 5 (Z=1,73)	Cambio 3 (Z=2,65)	Comparación 3 (Z=3,61)
Igualación 1 (Z=2)	Cambio 4 (Z=2,83)	Igualación 3 (Z=3)
Igualación 2 (Z=1,73)	Cambio 6 (Z=3,64)	Igualación 4 (Z=3,32)
	Combinación1 (Z=2,45)	Igualación 5 (Z=2,45)
	Combinación2 (Z=2,65)	Igualación 6 (Z=3,32)
	Comparación1 (Z=2,83)	

PREESCOLAR

Gráfico 5.1.43 : Representación gráfica de los porcentajes de respuestas correctas en cada uno de los problemas utilizando números grandes y números pequeños :

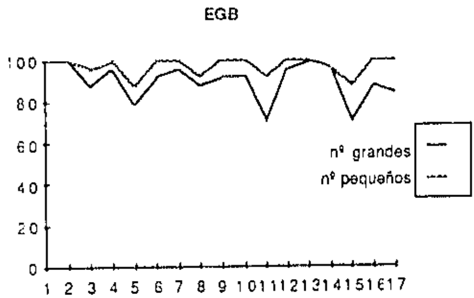


Los problemas quedan clasificados del siguiente modo, de acuerdo con el nivel de significatividad de las diferencias de proporción de respuestas correctas, cuando se plantean en uno y otro tamaño del número:

sin diferencia significativa	*	**
Cambio 5	Cambio 2 (Z=2,24)	Cambio 1 (Z=3)
	Cambio 3 (Z=2,24)	Cambio 4 (Z=2,65)
	Combinación 1 (Z=2,24)	Cambio 6 (Z=3,16)
	Igualación 1 (Z=1,73)	Combinación 2 (Z=2,45)
	Igualación 2 (Z=1,73)	Comparación 1 (Z=2,45)
		Comparación 2 (Z=3,16)
		Comparación 3 (Z=2,83)
		Igualación 3 (Z=3)
		Igualación 4 (Z=2,64)
		Igualación 5 (Z=3)
		Igualación 6 (Z=2,64)

EGB

Gráfico 5.1.44 : Representación gráfica de los porcentajes de respuestas correctas obtenidos en los dos tamaños del número :



Teniendo en cuenta el grado de significatividad alcanzado al hallar la diferencia de proporciones de respuestas correctas en un tamaño y otro del número, podemos clasificar los problemas del siguiente modo:

sin diferencia significativa	*	**
Cambio 1 (Z=0)	Comparación 3 (Z=2,23)	
Cambio 2 (Z=0)	Igualación 4 (Z=2)	
Cambio 3 (Z=1,41)	Igualación 5 (Z=1,73)	
Cambio 4 (Z=1)	Igualación 6 (Z=2)	
Cambio 5 (Z=1,41)		
Cambio 6 (Z=1,41)		
Combinación 1 (Z=1)		
Combinación 2 (Z=1)		
Comparación 1 (Z=0		
Comparación 2 (Z=1,41)		
Igualación 1 (Z=1)		
Igualación 2 (Z=0)		
Igualación 3 (Z=0)		

5.1.3 Estudio de relaciones

Para estudiar la relación entre las distintas variables tomadas dos a dos, hemos utilizado el test de **ji-cuadrado** como prueba de independencia. El nivel de confianza que exigimos para rechazar la hipótesis nula, es decir, para considerar significativa la relación es del 95% ($p \leq 0,05$). Las tablas de contingencia pueden consultarse en el anexo.

En el caso de no cumplirse las exigencias requeridas para la aplicación de este estadístico o bien cuando hemos creído oportuno confirmar los resultados por medio de otro test, hemos recurrido a la prueba de la **probabilidad exacta de Fisher**.

Relación de las pruebas piagetianas entre sí

Cada una de las pruebas ha sido considerada como una variable con tres categorías, correspondientes a las tres etapas establecidas por Piaget. Sin embargo, al realizar el cálculo, nos encontramos con varias celdillas con frecuencia teórica menor que 5, lo que nos obliga a combinar las categorías correspondientes a las etapas 1 y 2, considerando únicamente si los niños han alcanzado o no la tercera etapa indicada por Piaget en cada adquisición. A partir de las tablas de 2x2 así constituidas se ha obtenido el estadístico ji-cuadrado con corrección de continuidad.

En la **muestra total** encontramos altamente significativa ($p=0.0012$) la relación entre los resultados obtenidos en las pruebas de **Inclusión de clases** y de **Conservacióndel número.** El coeficiente de Contingencia (C) es de 0.458, que equivale a un $r = 0.805$.

Las pruebas de **Inclusión** y de **Seriación** están también relacionadas significativamente. El coeficiente de Contingencia es de 0.356, equivalente a una $r = 0.71$.

Sin embargo, no se rechaza la hipótesis de independencia en el caso de las tareas de **Conservación del número** y **Seriación**.

Si consideramos en estas mismas pruebas sólo a los niños de **Preescolar**, las tareas con mayor contingencia en sus resultados son las de **Inclusión** y **Seriación** (C=0,459, equivalente a una r=0,805), seguidas de las de **Conservación** e **Inclusión** (C = 0,423, equivalente a r=0,773) pero sólo puede hablarse de significatividad si no aplicamos la corrección de Yates a la ji-cuadrado obtenida. Por medio de la prueba de la probabilidad exacta de Fisher sólo se alcanza la significatividad al nivel del 5% en el primer caso.

Al averiguar la relación que mantienen las pruebas piagetianas entre sí en cada uno de los cursos de Preescolar por separado a través de esta última técnica estadística, únicamente obtenemos relación significativa entre **Inclusión** y **Seriación** y sólo en 2º de Preescolar.

En **EGB** no se rechaza la hipótesis de independencia cuando se aplica el estadístico ji-cuadrado a las pruebas piagetianas tomadas dos a dos. Sólo si no se aplica la corrección de Yates aparece como significativa la relación entre **Conservación** e **Inclusión** con un C=0,401 que equivale a r=0,705. En este caso, la p de Fisher es de 0,036, permitiéndonos concluir a nivel de confianza del 5% que esta distribución no puede darse por azar.

Tomados separadamente los cursos de EGB y utilizando esta última técnica (dado lo exiguo de las muestras), no hemos encontrado relaciones significativas entre las pruebas de Piaget.

Relación de las pruebas sobre las propiedades aritméticas entre sí

Como en el caso anterior, la presencia de frecuencias teóricas menores que 5 en las tablas de contingencia de 3x3 nos ha conducido a agrupar las categorías que corresponden a los estadios 1 y 2 y aún, posteriormente, a aplicar la corrección de Yates.

Los resultados obtenidos por los niños en estas pruebas, tomada la **muestra en su conjunto**, están significativamente relacionados, a excepción de la Inferencia con la Asociatividad y con la Compensación. Los coeficientes de Contingencia hallados y su equivalencia en r de Pearson han sido, de mayor a menor, los siguientes :

. **Inversión** y **Compensación** : C=0,606 (r = 0,925).

. **Inferencia** y **Conmutatividad** : C = 0,469 (r=0,814).

. **Asociatividad** y **Conmutatividad** : C = 0,448 (r = 0,796).

. **Asociatividad y Compensación** : C = 0,439 (r = 0,787)

. **Inversión** y **Conmutatividad** : C=0,428 (r = 0,778).

. **Asociatividad** e **Inversión** : C = 0,415 (r = 0,766).

. **Compensación** y **Conmutatividad** : C=0,403 (r = 0,755).

. **Inferencia** e **Inversión** : C=0,378 (r = 0,731).

En **Preescolar**, cuando tratamos de averiguar la relación entre las distintas propiedades de la aritmética, nos encontramos con que en ningún caso puede rechazarse la hipótesis nula de independencia al 5%. El mismo resultado hemos obtenido cuando hemos analizado las relaciones en cada uno de los cursos separadamente.

En **EGB** se han encontrado significativas las relaciones entre :

. **Inversión** y **Compensación** : C = 0,677 (r = 0,978).

. **Inferencia** y **Conmutatividad** : C = 0,507 (r = 0,847).

. **Inversión** y **Conmutatividad** : C = 0,487 (r = 0,830).

. **Compensación** y **Conmutatividad** : C = 0,456 (r = 0,803).

. **Asociatividad** y **Compensación** : C = 0,452 (r = 0,799).

En **1º de EGB** por medio de la prueba de la probabilidad exacta de Fisher se destacan como significativas las relaciones entre la propiedad **Asociativa** y las de **Inversión** y **Compensación**, entre la propiedad de la

Inversión y las de **Compensación** y **Conmutatividad** y entre la de **Compensación** y **Conmutatividad**.

En **2º de EGB** sólo encontramos significativa la relación entre **Inversión y Compensación** ($p = 0.007$).

Relación de las pruebas piagetianas con las pruebas de las propiedades aritméticas

En la **muestra total**, la prueba de **Inclusión de clases** aparece significativamente relacionada con las de **Asociatividad** (C=0,356 equivalente a r=0,71) y **Conmutatividad** (C=0,468, r=0,814).

La **Conservación del número** está vinculada de forma estadísticamente *significativa con todas las propiedades aritméticas excepto con la* **Inferencia de la operación.** El coeficiente de Contingencia más alto lo presenta con la **Asociatividad** (C=0,511, que equivaldría a r=0,85) y con la propiedad **Conmutativa** (C=0,468, r=0,814). La relación también es altamente significativa (p=0,003) con la **Inversión** (C=0,43, r=0,78).

De las pruebas piagetianas, la menos vinculada con las propiedades *aritméticas es la de* **Seriación,** *que sólo se relaciona significativamente* con la **Inferencia** (C=0,378 equivalente a r=0,731) y con la **Asociatividad** (C=0,331, r=0,684).

En **Preescolar** la prueba de ji-cuadrado con corrección de continuidad no pone de manifiesto ninguna relación significativa entre las pruebas piagetianas y las propiedades aritméticas. Sin embargo, sin la *corrección mencionada la prueba de* **Conservación** *aparece vinculada a* las propiedades de **Inversión** y **Compensación**, la de **Inclusión** con las de **Asociatividad** y **Conmutatividad** y la de **Seriación** con la de **Inferencia**. La prueba de la probabilidad exacta de Fisher destaca como significativa la relación entre **Seriación e Inferencia** ($p = 0,02$).

En 1º de **Preescolar** esta última técnica nos señala como significativas la relación entre **Inclusión y Conmutatividad** (p=0,01) y entre **Seriación** e **Inferencia** por una parte y **Compensación** por otra. En 2º no se alcanza la significatividad estadística en ninguno de los casos.

En **EGB**, las únicas propiedades de la aritmética que aparecen vinculadas con las pruebas piagetianas son :

. **Asociatividad** con **Conservación** (C=0,477, r=0,821)

. **Conmutatividad** con **Inclusión** (C=0,427, r=0,777) y con

. **Seriación** (C=0,427, r=0,604), en estos dos casos sin aplicar la corrección de Yates. La prueba de la probabilidad exacta de Fisher indica en ambos casos significatividad al 5%

Cuando consideramos por separado los dos cursos de EGB, no encontramos ninguna relación significativa.

Relación de las pruebas piagetianas con los problemas aritméticos de enunciado verbal.

Conservación del número

En la **muestra total**, la prueba de Conservación del número presenta una relación significativa con 11 de los 17 problemas planteados con **números grandes**. Los coeficientes de Contingencia hallados son, de mayor a menor, los siguientes:

. con **Igualación 4** : C = 0,577 (r = 0,903).

. con **Cambio 5** : C = 0,504 (r = 0,809).

. con **Combinación 2** : C = 0,479 (r = 0,823).

. con **Igualación 5** : C = 0,45 (r = 0,798).

. con **Cambio 6** : C = 0,43 (r = 0,779).

. con **Comparación 2** : C = 0,376 (r = 0,729).

. con **Igualación 3** : C = 0,414 (r= 0,765)

. con **Cambio 3** : C = 0,413 (r = 0,764).

. con **Comparación 3** : C = 0,397 (r = 0,749).

. con **Comparación 1** : C = 0,38 (r = 0,733).

. con **Combinación 1** : C = 0,345 (r = 0,698).

No se rechaza la hipótesis de independencia en el caso de los problemas de **Cambio 1**, **Cambio 2**, **Cambio 4**, **Igualación 1**, **Igualación 2** e **Igualación 6**. Recuérdese que las tablas de contingencia correspondientes se encuentran en el anexo 3.

Cuando los números utilizados en los problemas son **pequeños**, la prueba de Conservación del número está vinculada significativamente sólo con los problemas :

. **Cambio-5** : C = 0,504 (r = 0,844).

. **Comparación-3** : C = 0,38 (r = 0,73).

. **Cambio-3** : C = 0,363 (r = 0,716).

. **Combinación-2** : C = 0,363 (r = 0,716).

. **Igualación-4** : C = 0,376 (r = 0,73).

Es decir, en estos problemas los conservadores difieren significativamente de los no conservadores. En los doce problemas restantes no se rechaza la hipótesis de independencia con la prueba de Conservación.

En **Preescolar**, sólo un niño ha alcanzado la etapa 3 de Conservación. Con números **grandes** este niño resuelve todos los problemas excepto los de Cambio-5 (dos no conservadores lo solucionan), Comparación-3 (tres no conservadores encuentran la solución) e Igualación-5 (seis no conservadores lo resuelven bien). El resto de los problemas también los resuelve una proporción de niños que no han alcanzado la etapa 3 de Conservación. Con números **pequeños** el niño que ha llegado a esta etapa resuelve la totalidad de los problemas. Entre los no conservadores un porcentaje importante de niños también los resuelve. (Consultar las tablas de Contingencia que relacionan Conservación con las respuestas correctas en los problemas, en el anexo 3). En ningún caso llega a rechazarse la hipótesis nula de independencia. Es decir, en los cursos de Preescolar el hecho de alcanzar la etapa 3 en la prueba de Conservación del número no se relaciona significativamente con la solución a los problemas, sea cual sea el tamaño de los números.

Considerados por separado los cursos de Preescolar, no encontramos en ninguno de ellos relación significativa entre el hecho alcanzar la etapa 3 en esta prueba y la solución de los distintos problemas. El único preescolar que se encuentra en tal etapa cursa 1º. Los problemas que presentan mayor contingencia con la tarea de Conservación son : Cambio-4, Cambio-6, Combinación-2, Igualación-4, Igualación-6 con números grandes y Cambio-5 con números pequeños. En todos ellos sólo dos niños contestan correctamente y uno de ellos es el "conservador". Sin embargo, la p de Fisher no alcanza la significatividad estadística.

En **EGB** la prueba ji-cuadrado indica que el único problema que está relacionado de forma estadísticamente significativa con la prueba de Conservación es el de **Igualación 4** con **números grandes**. El coeficiente de Contingencia es de 0,497 y equivale a una r de Pearson de 0,838. En este problema, de los 14 niños "conservadores" resuelven bien el problema 13, mientras que de los 10 no conservadores sólo lo hacen 4 (ver anexo, pag.). Si no aplicamos la corrección de continuidad se rechaza también la hipótesis nula en el caso de los problemas **Cambio 5** (C=0,37, r=0,723), **Combinación 2** (C=0,408, r=0,76), **Igualación 5** (C=0,408, r=0,76). Aplicada la prueba de la probabilidad exacta de Fisher a la relación entre Conservación y estos tres problemas, la p alcanza la significatividad estadística en los casos de Combinación 2 e

Igualación 5. En 11 de los 17 problemas planteados con **números pequeños** no ha sido posible la elaboración de la tabla de contingencia porque todos los niños se encuentran en la misma categoria al haberlos resuelto todos los niños correctamente y en el resto tampoco ha podido rechazarse la hipótesis nula.

En **1º de EGB** la prueba de Conservación no aparece vinculada significativamente con ninguno de los problemas, mientras que en **2º** lo está con el de **Igualación-4** con números grandes (p de Fisher = 0,045).

Inclusión de clases

Cuando tenemos en cuenta el **total de la muestra**, la prueba de Inclusión está significativamente relacionada con los siguientes problemas que utilizan **números grandes** :

. **Cambio 3** (C = 413, equivalente a r = 0,764).

. **Comparación 3** (C = 0,397, equivalente a r = 0,749).

. **Igualación 4** (C = 0,397,equivalente a r = 0,749).

. **Cambio 5** (C = 0,373,equivalente a r = 0,726).

. **Cambio 6** (C = 0,356, r = 0,71)

. **Combinación 1** (C = 0,345, r = 698).

. **Combinación 2** (C = 0,34, equivalente a r = 0,693).

. **Igualación 3** (C = 0,337, equivalente a r = 0,69).

Cuando no es preciso agrupar categorias, los coeficientes de Contingencia son más elevados, como ocurre con: **Cambio 3** (C=0,533), **Comparación 3** (C=0,522), **Igualación 5** (C=0,416), **Igualación 4** (C=0,408), **Cambio 6** (C=0,405), **Cambio 5** (C=0,403) y **Combinación-2** (C=0,375). En estos casos no puede hallarse el equivalente al coeficiente de correlación de Pearson por no ser igual el número de filas y columnas en las tablas de contingencia.

En el resto de los problemas no puede rechazarse la hipótesis nula de independencia con respecto a la prueba piagetiana de la Inclusión al nivel establecido.

Con **números pequeños** encontramos únicamente relación con los problemas :

. **Cambio 5** (C=0,375, que correspondería a r=0,728).

. **Comparación 3** (C=0,296,correspondiente a r=0,647)

Podemos afirmar la independencia de la Inclusión de clases con el resto de los problemas, excepto con **Comparación 1** (C = 0,289,r equivalente = 0,639), **Cambio 3** y **Combinación 2** (C = 0,274, r equivalente = 0,622), si no tenemos en cuenta la corrección de Yates (necesaria porque salen frecuencias teóricas menores de 5).

En **Preescolar** no se rechaza la hipótesis nula en ninguno de los problemas cualquiera que sea el tamaño del número. Podemos, por tanto afirmar la **independencia** entre haber llegado a la **etapa 3** de Inclusión y la **solución a los problemas**. En todos los casos hay niños que no lo han hecho y sin embargo responden bien a los problemas. En los de Cambio 5, Comparación 3 e Igualación 5 con números grandes ninguno de los 4 niños que han alcanzado la etapa 3 los resuelve correctamente, mientras que lo hacen dos que no han llegado a ella en Cambio 5, tres en Comparación 3 y 6 en Igualación 5 (consultar tablas de contingencia en el anexo 3).

Si tomamos separadamente los dos cursos de Preescolar, nos encontramos que en **1º**, la Inclusión de clases está vinculada significativamente con los problemas **Combinación-1** y **Comparación-2**, ambos con **números grandes**. En 2º no se alcanza la significatividad estadística con ninguno de los problemas.

En **EGB** el único problema que presenta una relación significativa con la prueba de Inclusión es el de **Comparación 3**, con un coeficiente de Contingencia de C = 0,508, que equivale a r = 0,848 (consultar tabla de contingencia en el anexo, pag   ). Sin aplicar la corrección de continuidad, sale también significativa la relación de Inclusión con Cambio 5 (C=0,427, equivalente a r=0,777) e Igualación 4 (C=0,376, r equivalente=0,729). La p de Fisher indica significatividad al 5% sólo en **Cambio 5**. En los tres casos los problemas utilizan **números grandes**.

Considerados por separado, en los cursos de EGB la prueba de Inclusión de clases no aparece significativamente relacionada con ninguno de los problemas.

Seriación

En la **muestra total**, la prueba de seriación está vinculada significativamente con seis de los problemas presentados con **números grandes** :

. **Cambio 3** (C = 0,435, r equivalente = 0,784).

. **Cambio 5** (C = 0,407, r equivalente = 0,759).

. **Cambio 6** (C = 0,376, r equivalente = 0,729).

. **Combinación 2** (C = 0,365, r equivalente = 0,718).

. **Igualación 4** (C = 0,362, r equivalente = 0,715).

. **Igualación 3** (C = 0,356, r equivalente = 0,71).

Sin tener en cuenta la corrección de Yates la relación se extiende a los problemas : Cambio 4 (C=0,315, r equivalente=0,667), Comparación 1 (C=0,315, r equivalente=0,667), Igualación 1 (C=0,302, Igualación 6 (C=0,298, r equivalente=0,649), ~~Comparación 3 (C=0,266,~~ r=0,636), r=0,653), Igualación2 (C=0,28, r = 0,629).

Con **números pequeños**, la prueba de seriación sólo se relaciona significativamente al nivel establecido con:

. **Combinación 2** (C = 0,378, equivalente a r = 0,731).

. **Cambio 5** (C = 0,333, equivalente a r = 0,686).

Cuando no aplicamos corrección de continuidad, se rechaza también la hipótesis nula de independencia en : Comparación 1 (C=0,302, r equivalente=0,653), Igualación 4 (C=0,321, r equivalente=0,674), Cambio 3 (C=0,293, r equivalente=0,644), Comparación 3 (C=0,275, r equivalente=0,624).

En **EGB** , aplicando ji-cuadrado **no puede rechazarse la hipótesis de independencia** de la prueba de Seriación con los problemas, sea cuál sea el tamaño del número, al nivel de p = 0,05. Prescindiendo de la corrección de Yates aparece relacionada con los problemas : **Cambio 5** (C = 0,427, equivalente a r=0,777), Igualación 6 (C=0,38, equivalente a r=0, 733), Igualación 4 (C=0,376, equivalente a r=0,729), todos ellos presentados con números grandes. La prueba de Fisher sólo confirma la significatividad estadística en el caso del problema Cambio 5. Si consideramos por separado los cursos de 1º y 2º tampoco hallamos ningún vínculo significativo.

En **Preescolar** la prueba piagetiana de Seriación sólo está vinculada de una forma estadísticamente significativa con el problema **Cambio 3** con **números grandes** (C=0,522, que equivale a r=0,859). Sin tener en cuenta la corrección de Yates, aparece también como significativa la relación con **Cambio 6**, **Igualación 3** (C=0,439, r=0,788 en ambos casos), Combinación 2 (C=0,378, r=0,731), con números grandes y con **Combinación 2** (C=0,439, r=0,788) con **números pequeños**. Excepto en el caso de Combinación-2 con números grandes, la p de Fisher alcanza significatividad estadística.

En **1º de Preescolar** la prueba de Seriación es la que presenta mayor contingencia con los resultados en los problemas. La prueba de la probabilidad exacta de Fisher pone de manifiesto relación significativa con : **Cambio-3**, **Cambio-4**, **Cambio-6**, **Combinación-2** e **Igualación-3** con **números grandes** y con **Cambio-5** y **Combinación-2** con **números pequeños**.

Relación de las propiedades de la aritmética con los problemas aritméticos de enunciado verbal.

Inferencia de la operación realizada

En la **muestra total**, esta prueba aparece relacionada de forma altamente significativa con **todos los problemas** con **números grandes** . El coeficiente de Contingencia mayor se encuentra entre Inferencia y los problemas :

. **Cambio 4** (C = 0,59, equivalente a r = 0,913).

. **Igualación 2** (C = 0,582, equivalente a r = 0,907)

. **Cambio 3** (C = 0,581, equivalente a r = 0,906).

. **Cambio 6** (C = 0,581, r equivalente = 0,906)

. **Cambio 1** (C = 0,578, r equivalente = 0,904).

. **Comparación 2** (C = 0,562, r equivalente = 0,892).

. **Cambio 2** (C = 0,542, r equivalente = 0,875).

. **Igualación 1** (C = 0,542, r equivalente = 0,875).

. **Comparación 1** (C = 0,528, r equivalente = 0,864).

. **Igualación 6** (C = 0,522, equivalente a r = 0,859).

. **Combinación 1** (C = 0,515, r equivalente = 0,853).

Con **números pequeños** no se rechaza la hipótesis de **independencia** en el caso de los problemas **Cambio 1** y **Cambio 6**. La más alta contingencia se da con los problemas :

. **Combinación 2** (C = 0,555, r = 0,886).

. **Comparación 1** (C = 0,509, r = 0,848).

. **Igualación 4** (C = 0,501, r = 0,842).

. **Cambio 4** (C = 0,509, r = 0,848).

. **Igualación 5** (C = 0,505, r = 0,845).

. **Cambio 5** (C = 0,5, r = 0,5, r = 0,841).

En **EGB**, la prueba de Inferencia sólo se relaciona de forma estadisticamente significativa con los problemas:

. **Comparación 2** (C=0,707, equivalente a r=1)

. **Cambio 3** (C=0,624, que puede traducirse a r=0,939)

. **Cambio 5** (C = 0,507, r = 0,847), en los tres casos con **números grandes**.

Con **números pequeños**, se observa contingencia significativa con :

. **Cambio 5** (C = 0,624, r = 0,939).

. **Comparación 1** (C = 0,707, r = 1).

. **Igualación 4** (C = 0,624, r = 0,939).

. **Igualación 6** (C = 0,509, r = 0,848).

Considerando por separado los dos cursos, la prueba de la probabilidad exacta de Fisher destaca en **1º** como significativas las relaciones de inferencia con **Cambio 3** con **números grandes** y con **Cambio 5**, **Comparación 1 e Igualación 4 con números pequeños**. En 2º de EGB todos los sujetos están en la etapa 3 por lo que no se forma la tabla de contingencia de 2x2.

En **Preescolar**, la inferencia de la operación realizada está significativamente relacionada con todos los problemas con **números grandes** excepto con Cambio 5, Combinación 2, Comparación 2, Comparación 3, Igualación 4 e Igualación 5. Con Combinación 2, Comparación 2 e Igualación 5, la ji-cuadrado pone de manifiesto relaciones significativas si no se tiene en cuenta la corrección de Yates. En los tres casos la p de Fisher es inferior a 0,05. En éstos, casi la totalidad de los sujetos que los resuelven, están en el nivel 3 en la prueba de inferencia, pero muchos de los que son capaces de hacer tal inferencia, no los resuelven. La mayor contingencia se observa entre esta prueba y los problemas **Igualación 1** e **Igualación 2** (C=0,605, que equivale a r=0,925), **Comparación 1** (C=0,6, equivalente a r=0,921), **Cambio 6** (C=0,581, equivalente a r=0,906), **Cambio 4** e **Igualación 6** (C=0,56, equivalente a r=0,89), **Cambio 1**, **Cambio 2** y **Combinación 1** (C=0,549, equivalente a r=0,88), **Cambio 3** (C=0,513, equivalente a r=0,852).

Con **números pequeños** *sólo se rechaza la hipótesis nula en los* siguientes casos : **Igualación 5** (C=0,567, equivalente a r=0,895) **Cambio 4**, **Combinación 2**, **Comparación 1**, **Comparación 2**, **Igualación 6** (C=0,519, equivalente a r=0,857), **Igualación 1** , **Igualación 2** (C=0,468, equivalente a r=0,814).

En **1º de Preescolar** la inferencia de la operación, tal y como se pone de manifiesto mediante la aplicación de la prueba de la probabilidad exacta de Fisher, aparece vinculada significativamente con los siguientes problemas : **Comparación 1**, **Igualación 1** e **Igualación 2** con **números grandes** y **Combinación 2** e **Igualación 5** con **números pequeños**.

Asociatividad

Cuando consideramos la **totalidad de la muestra**, los resultados en esta tarea están significativamente relacionados con los obtenidos en los siguientes problemas con **números grandes** :

. **Igualación 4** (C = 0,478, r equivalente = 0,822).

. **Cambio 5** (C = 0,46, r equivalente = 0,807).

. **Comparación 3** (C = 0,406, r equivalente = 0,758)

. **Cambio 3** (C = 0,404, r equivalente = 0,756).

. **Cambio 6** (C = 0,36, r = 0,713).

. **Igualación 5** (C = 0,356, r = 0,71).

. **Combinación 2** (C = 0,322, r = 0,675).

Y sólo con los resultados en **Cambio 5** (C=0,407, r=0,759) cuando se reduce el tamaño del número; con **Comparación 3** la relación es elevada (C=0,315, r=0,67) pero teniendo en cuenta la corrección de Yates no alcanza significatividad estadística (p=0,0554).

En **EGB** la prueba ji-cuadrado únicamente indica relación significativa con el problema de **Igualación 4** con **números grandes** (C=0,477, que puede traducirse a r=0,821). Sin tener en cuenta la corrección de Yates, encontramos también como significativa la relación con **Cambio 5** en este mismo tamaño del número (C=0,398, equivalente a r=0,75). La prueba de Fisher confirma la significatividad de tal relación. Con números pequeños, no puede en ningún caso rechazarse la hipótesis de independencia. En 1º y 2º de EGB considerados aisladamente, no se destaca ninguna relación significativa.

En **Preescolar** las tablas **no muestran contingencia** entre esta propiedad y los problemas, independientemente de cuál sea el tamaño de los números. Debemos recordar que al agrupar categorías perdemos mucha información, quedándonos un sólo sujeto en la correspondiente a la etapa 3. Considerando por separado los dos cursos encontramos este mismo resultado.

Inversión

En la **muestra total** los problemas Cambio 4, Cambio 6, Combinación 1, Comparación-1, Igualación 1 e Igualación 2 con números grandes, no se relacionan de forma significativa con la prueba de Inversión. El coeficiente de Contingencia más alto con tal prueba lo presenta el problema de **Igualación 4** con **números grandes** (C=0,549, que equivale a r=0,881), seguido de :

. **Cambio-5** (C = 0,529, r = 0,865).

. **Igualación-5** (C = 0,471, r = 0,816).

. **Combinación-2** (C = 0,434, r = 0,783).

. **Comparación-3** (C = 0,431, r = 0,781).

. **Comparación-1** (C = 0,396, r = 0,748).

. **Comparación 2** (C=0,396, r = 0,748).

. **Igualación-6** (C = 0,376, r = 0,729).

. **Cambio-3** (C = 0,365, r = 0,718).

. **Igualación-3** (C = 0,356, r = 0,71).

. **Cambio-1** (C = 0,322, r = 0,675).

. **Cambio-2** (C = 0,302, r = 0,653).

Con **números pequeños** sólo hay cinco problemas que presentan con la Inversión relación significativa:

. **Cambio 5** (C = 0,469, r = 0,814).

. **Combinación 2** (C = 0,378, r = 0,731).

. **Igualación 4** (C = 0,315, r = 0,667).

. **Comparación 3** (C = 0,356, r = 0,71).

. **Igualación 5** (C = 0,322, r = 0,675).

Si consideramos únicamente los cursos de **EGB**, la hipótesis de independencia se rechaza, con la prueba ji-cuadrado, en los problemas con números grandes :

. **Igualación 4** (C = 0,572, con r equivalente = 0,899).

. **Cambio 5** (C = 0,487, r = 0,83).

Además, la p de Fisher destaca como significativa la relación con **Igualación 6** (p = 0,03)

Con **números pequeños** la relación de la prueba de Inversión resulta significativa con estos mismos problemas pero en este caso sólo si no se aplica la corrección de continuidad. La prueba de la probabilidad exacta de Fisher nos dá una p superior al 0,005 en ambos casos.

Considerando por separado los dos cursos, en **1º de EGB** hallamos las relaciones ya mencionadas con números grandes, mientras que en **2º** la p de Fisher no alcanza en ningún caso la significatividad estadística.

Aplicando el test ji-cuadrado como prueba de independencia entre los resultados en la prueba de Inversión y los obtenidos en los problemas con **números grandes** por los niños de **Preescolar, en ningún caso llega a rechazarse la hipótesis nula**. Muchos de estos niños son capaces de resolver distinto tipo de problemas sin necesidad de haber alcanzado la etapa 3 en Inversión (sólo cuatro niños están en ella). Los cuatro niños que se encuentran en el tercer nivel de la prueba de Inversión resuelven satisfactoriamente los problemas Cambio 2, Comparación 1, Igualación 1 e Igualación 2. En el resto de los problemas, por lo menos alguno de ellos no llega a solucionarlo.

Con **números pequeños**, ocurre algo parecido, pero al simplificarse la tarea, el número de problemas que solucionan bien los cuatro niños de la etapa 3 aumenta al mismo tiempo que lo hace el porcentaje de niños que, sin haberla alcanzado, solucionan los distintos tipos de problemas (la única excepción es la del problema Cambio 5, que sólo lo resuelve uno de los que no han llegado a la etapa 3 de Inversión, lo mismo que ocurre con números grandes).

En 1º de **Preescolar** encontramos relación significativa con el problema de **Comparación 1.**

Compensación

En la **muestra total** la propiedad aritmética de la Compensación se relaciona significativamente con todos los problemas que utilizan **números grandes** excepto con los de Cambio 1, Cambio 2, Igualación 1 e Igualación 2, con respecto a los que no puede rechazarse la hipótesis de independencia al nivel establecido. Destacan los coeficientes de Contingencia obtenidos en los problemas de **Igualación 4** (C=0,577, que corresponde a r=0,903), **Cambio 5** (C=0,559 y r equivalente=0,889) y **Combinación 2** (C=0,479, equivalente a r=0,823). A continuación se encuentran los de :

. **Igualación 6** (C = 0,43, r = 0,78).

. **Cambio 3** (C = 0,413, r = 0,764).

. **Comparación 3** (C = 0,397, r = 0,749).

. **Igualación 5** (C = 0,382, r = 0,735).

. **Cambio 4** (C = 0,38, r = 0,733).

. **Comparación 1** (C = 0,38, r = 0,733).

. **Comparación 2** (C = 0,376, r = 0,729).

. **Cambio 6** (C = 0,356, r = 71).

. **Combinación 1** (C = 0,345, r = 0,698).

. **Igualación 3** (C = 0,337, r = 0,69).

Con números pequeños, esta prueba se relaciona de forma significativa sólo con los problemas de **Cambio 5** (C=0,504, r=0,844), **Combinación 2** (C=0,363, r=0,716) e **Igualación 4** (C=0,376, r=0,729).

En **EGB** aplicando ji-cuadrado, se rechaza únicamente la hipótesis nula en los problemas de **Igualación 4** (C=0,54, equivalente a r=0,874) y **Cambio 5** (C=0,456, r=0,803), en ambos casos con **números grandes**. La p de Fisher indica además relación significativa en **Igualación 6**. Con **números pequeños** la totalidad de los niños de estos cursos, independientemente de cuál haya sido su resultado en la prueba de Compensación, han respondido correctamente a 10 de los 17 problemas. En ninguno de los 7 restantes se alcanza significatividad estadística. Es decir, podemos afirmar que la solución correcta a los problemas con números pequeños es **independiente** del resultado en la tarea de Compensación. Si consideramos los cursos separadamente no se aprecia ninguna relación significativa.

En **Preescolar**, la propiedad de Compensación está significativamente relacionada con los problemas de **Igualación 4** (C=0,645, equivalente a r=0,955), **Cambio 5** (C=0,559, equivalente a r=0,889) y **Combinación 2** (C=0,535, equivalente a r=0,87) cuando los **números son grandes**. Con **números pequeños**, se observa una gran contingencia entre los resultados en esta prueba y los obtenidos en el problema **Cambio-5** : los tres niños que lo resuelven se encuentran en la etapa 3 de Compensación (sólo un niño que está en dicha etapa no lo hace) y de los 20 niños que no la han alcanzado, ninguno lo soluciona correctamente (C=0,645, equivalente a r=0,955).

En **1º de Preescolar** esta propiedad aritmética presenta contingencia con un importante número de problemas : **Cambio 3**, **Cambio 4**, **Cambio 6**, **Combinación 1**, **Combinación 2**, **Comparación 1**, **Comparación 2** e **Igualación 4** con **números grandes** y **Cambio 5**, con **números pequeños** (p de Fisher inferior a 0,05).

Conmutatividad

Esta propiedad aparece relacionada de forma altamente significativa con la totalidad de los problemas con **números grandes** cuando consideramos la **muestra total**. El coeficiente de Contingencia mayor se encuentra entre esta prueba y los problemas de **Cambio 6** (C=0,562, equivalente a r=0,891), **Cambio 5**, **Comparación 2** (C=0,541, equivalente a r=0,875), **Cambio-3** (C=0,529, equivalente a r=0,865), **Igualación 5** (C=0,528, equivalente a r=0,864), **Comparación 3** (C=0,519, equivalente a r=0,857) e **Igualación 4** (C=0,519, equivalente a r=0,857). Con el resto de los problemas los coeficientes han sido los siguientes:

. **Combinación 1** : C = 0,51 (r = 0,849).

. **Cambio 4** : C = 0.494 (r = 0,836).

. **Combinación 2** : C = 0,474 (r = 0.819).

. **Cambio 1** : C = 0,463 (r = 0,809).

. **Igualación 6** : C = 0,449 (r = 0,797).

. **Cambio 2** : C = 0,437 (r = 0,786).

. **Comparación 1** : C = 0,429 (r = 0,779).

. **Igualación 3** : C = 0,42 (r = 0,771).

. **Igualación 2** : C = 0,41 (r = 0,761).

Con **números pequeños**, destaca la relación con **Comparación 3** (C=0,591, equivalente a r=0,914), con **Cambio 5** (C=0,556, que equivale a r=0,887) y con **Combinación 2** (C=0,469, r equivalente=0,814), problemas que también presentan con los problemas de números grandes un elevado coeficiente de Contingencia. Además, la relación sigue siendo significativa con :

. **Cambio 3** (C = 0,399, r = 0,75).

. **Igualación 3** (C = 0,38, r = 0,733).

. **Combinación 1** (C = 0,348, r = 0,701).

. **Igualación 6** (C = 0,348, r = 0,701).

. **Comparación 1** (C = 0,35, r = 0,703).

. **Igualación 4** (C = 0,345, r = 0,699).

. **Comparación 2** (C = 0,348, r = 0,701).

En **EGB** esta prueba está relacionada de forma estadísticamente significativa con los siguientes problemas que incluyen **números grandes:**

. **Cambio 5** (C = 0,599, equivalente a r = 0,92).

. **Cambio 3** (C = 0,593, r = 0,915).

. **Combinación 2** (C = 0,593, r = 0,915).

. **Igualación 5** (C = 0,593, r = 0,915).

. **Cambio 6** (C = 0,507, r = 0,847).

. **Comparación 2** (C = 0,507, r = 0,847).

. **Comparación 3** (C = 0,498, r = 0,839).

. **Igualación 4** (C = 0,498, r = 0,498, r = 0,839).

Con **números pequeños**, la hipótesis de independencia se rechaza sólo con respecto a cuatro problemas :

. **Cambio 5** (C = 0,593, r equivalente = 0,915).

. **Combinación 2** (C= 0,507, r = 0,847).

. **Comparación 1** (C = 0,507, r = 0,847).

. **Comparación 3** (C = 0,507, r = 0,847).

En **1º de EGB** se destaca como significativa la relación de la propiedad Conmutativa con los problemas : **Cambio 3, Cambio 5, Combinación 2, Comparación 3** e **Igualación 5** con **números grandes** y **Cambio 5** y **Comparación 3** con **números pequeños**, tal y como se ha puesto de manifiesto a través de la prueba de la probabilidad exacta de Fisher. En **2º de EGB**, aunque la p de Fisher no alcanza el nivel de significatividad exigido en ningún caso, se aprecia una relación estrecha entre esta propiedad y los problemas de **Cambio 5, Cambio 6** y **Combinación 2** con **números grandes**. En todos ellos el único niño que no responde correctamente, es el único que no ha alcanzado la etapa 3 en Conmutatividad. La p de Fisher alcanzada es de 0,08.

Sólo hay siete niños de **Preescolar** que han alcanzado la etapa 3 en la prueba sobre la propiedad conmutativa. Como indica la prueba ji-cuadrado, tal resultado se vincula significativamente con la solución correcta a los problemas con **números grandes** :

. **Comparación 2** (C=0,538, que corresponde a r=0,872).

. **Cambio 6** (C=0,497, r=0,838).

. **Cambio 1** (C=0,477, que corresponde a r=0,821).

. **Combinación 1** (C=0,477, r=0,821).

La prueba p de Fisher destaca también como significativa al 5% la relación con **Cambio 2, Cambio 4** e **Igualación 6**.

Con **números pequeños** el único problema que aparece significativamente relacionado con esta propiedad de la aritmética es el de **Comparación 3** (C=0,508, equivalente a r=0,899). Los 7 niños que están en la etapa 3 lo solucionan correctamente y sólo lo hacen 6 de los 17 que no la han alcanzado.

En **1º de Preescolar**, tomado aisladamente, la Conmutatividad está significativamente relacionada con los problemas de **Combinación 1** y **Comparación 2** con **números grandes** y en **2º de Preescolar** con el de **Comparación 3** con **números pequeños** (p de Fisher$\leq$ 0,05).

Relación de los problemas entre sí

Problemas con números grandes

Cuando tenemos en cuenta la **totalidad de la muestra**, se rechaza la hipótesis de independencia en todos los casos excepto cuando aplicamos ji-cuadrado a los problemas de Comparación-3 con Igualación-1. Con esta salvedad, los problemas con números grandes están relacionados entre si de forma altamente significativa en la mayor parte de los casos. Los coeficientes de Contingencia más elevados se encuentran entre :

. **Cambio 2 e Igualación 2** : C = 0,679 (r = 0,98).

. **Igualación 1 e Igualación 2** : C = 0,679 (r = 0,98).

. **Cambio 4 e Igualación 2** : C = 0,678 (r = 0,979).

. **Cambio 5 e Igualación 4** : C = 0,658 (r = 0,965).

. **Cambio 2 e Igualación 1** : C = 0,648 (r = 0,957).

. **Cambio 2 y Combinación 1** : C = 0,634 (r = 0,947).

. **Cambio 1 y Cambio 2** : C = 0,619 (r= 0,936).

. **Cambio 4 y Comparación 1** : C = 0,619 (r = 0,936).

. **Cambio 3 y Cambio 6** : C = 0,617 (r = 0,934).

. **Cambio 4 y Combinación 1** : C = 0,617 (r = 0,934).

. **Cambio 4 y Cambio 6** : C = 0,606 (r = 0,926).

. **Cambio 4 e Igualación 6** : C = 0,606 (r = 0,923).

. **Comparación 1 e Igualación 6** : C = 0,606 (r = 0,923).

. **Combinación 1 e Igualación 2** : C = 0,604 (r = 0,924).

. **Cambio 1 y Combinación 1** : C = 0,602 (r = 0,923).

. **Cambio 3 y Cambio 4** : C = 0,602 (r = 0,923).

En **EGB**, aplicando el estadístico ji-cuadrado como prueba de independencia entre los distintos problemas con **números grandes**, podemos rechazar la hipótesis nula en los siguientes casos :

. **Combinación 1** con **Igualación 3** (C = 0,707, r = 1)

. **Cambio 5** con **Igualación 4** (C = 0,624, r = 0,939).

. **Cambio 6** con **Combinación 2** (C = 0,624, r = 0,939).

. **Comparación 1** con **Igualación 6** (C = 0,559, r = 0,889).

. **Cambio 3** con **Combinación 2** (C = 0,526, r = 862).

. **Cambio 3** con **Igualación 5** (C = 0,526, r = 0,862).

. **Combinación 2** con **Igualación-5** (C = 0,526, r = 0,862).

. **Cambio-3** con **Igualación 3** (C = 0,508, r = 0,848).

. **Comparación 3** con **Igualación 5** (C = 0,508, r = 0,848).

. **Cambio 5** con **Cambio 6** (C = 0,507, r = 0,847).

En **Preescolar**, los problemas (con **números grandes**) que presentan un coeficiente de Contingencia más alto son :

. **Igualación 1 e Igualación 2** (C = 0,707, r = 1).

. **Cambio 4 y Comparación 1** (C = 0,677, r = 0,978).

. **Cambio 2 e Igualación 1** (C = 0,672, r = 0,975).

. **Cambio 2 e Igualación 2** (C = 0,672, r = 0,975).

. **Cambio 4 y Cambio 6** (C = 0,645, r = 0,955).

. **Cambio 4 y Combinación 1** (C = 0,645, r = 0,955).

. **Combinación 1 e Igualación 6** (C = 0,645, r = 0,955).

. **Cambio 2 y Combinación 1** (C = 0,642, r = 0,953).

. **Cambio 3 y Cambio 6** (C = 0,642, r = 0,953).

. **Cambio 4 e Igualación 6** (C = 0,64, r = 0,951).

. **Cambio 1 y Combinación 1** (C = 0,638, r = 0,95).

. **Cambio 5 e Igualación 4** (C = 0,624, r = 0,939).

. **Cambio 6 y Comparación-1** (C = 0,614, r = 0,932).

. **Cambio-2 y Comparación 1** (C = 0,609, r = 0,928).

. **Combinación 1 e Igualación 1** (C = 0,605, r = 0,925).

. **Combinación 1 e Igualación 2** (C = 0,605, r = 0,925).

. **Comparación 1 e Igualación 6** (C = 0,601, r = 0,922).

. **Combinación 1 y Comparación 1** (C = 0,6, r = 0,921).

Problemas con números pequeños

En la **muestra total**, los problemas que están relacionados de forma altamente significativa, encontrándose los coeficientes de Contingencia más elevados, son :

. **Combinación 1** con **Igualación 2** (C = 0,662, r = 0,968).

. **Cambio 2** con **Igualación 6** (C = 0,604, r = 0,924).

. **Combinación 2** con **Comparación 3** (C=0,601, r=0,922).

. **Igualación 1** con **Igualación 2** (C = 0,588, r = 0,912).

. **Cambio 4** con **Igualación 1** (C = 0,538, r = 0,872).

. **Cambio 4** con **Igualación 2** (C = 0,538, r = 0,872).

. **Cambio 6** con **Combinación 1** (C = 0,538, r = 0,872).

. **Combinación 1** con **Igualación 1** (C = 0,538, r = 0,872).

. **Igualación 1** con **Igualación 5** (C = 0,532, r = 0,867).

. **Igualación 2** con **Igualación 5** (C = 0, 532, r = 0,867).

. **Cambio 5** con **Igualación-4** (C = 0,526, r = 0,862).

. **Cambio 3** con **Cambio 4** (C = 0,509, r = 0,848).

. **Cambio 3** con **Cambio 5** (C = 0,509, r = 0,848).

. **Cambio 3** con **Combinación 1** (C = 0,509, r = 0,848).

. **Cambio 4** con **Combinación 2** (C = 0,509, r = 0,848).

. **Combinación 2** con **Igualación 6** (C = 0,509, r = 0,848).

. **Combinación 2** con **Igualación 5** (C = 0,505, r = 0,845).

. **Cambio 4** con **Comparación 1** (C = 0,501, r = 0,842).

En el anexo se incluyen todos los casos en los que se rechaza la hipótesis nula de independencia.

Cuando sólo tenemos en cuenta el grupo de **EGB**, resulta que la mayor parte de los niños solucionan bien los problemas con números pequeños, de modo que la mayor parte de las veces no puede hallarse ji-cuadrado por encontrarnos en la variable problema sólo el valor 1. En el resto de los casos no se alcanza la significatividad estadística.

En **Preescolar**, hemos encontrado relación significativa al nivel prefijado ($p \leq 0{,}05$) entre :

. **Comparación 1 e Igualación 2** (C = 0,612, r = 0,93).

. **Comparación 2 e Igualación 3** (C = 0,599, r = 0,92).

. **Cambio 2 e Igualación 6** (C = 0,593, r = 0,916).

. **Igualación 1 e Igualación 2** (C = 0,573, r = 0,9).

. **Cambio 4 y Comparación 1** (C = 0,546, r = 0,879).

. **Combinación 1 y Comparación 1** (C = 0,546, r = 0,879).

. **Comparación 1 e Igualación 6** (C = 0,546, r = 0,879).

. **Cambio 4 y Combinación 2** (C =0,519, r = 0,857).

. **Combinación 2 y Comparación 3** (C = 0,519, r = 0,857).

. **Combinación 2 e Igualación 6** (C = 0,519, r = 0,857).

. **Igualación 2 e Igualación 3** (C = 0,512, r = 0,85).

. **Igualación 2 e Igualación 6** (C = 0,512, r = 0,85).

. **Cambio 6 y Combinación 1** (C = 0,512, r = 0,85).

. **Igualación 1 e Igualación 5** (C = 0,5, r = 0,841).

. **Igualación 2 e Igualación 5** (C = 0,5, r = 0,841).

. **Combinación 2 e Igualación 5** (C = 0,493, r = 0,835).

. **Cambio 3 y Cambio 4** (C = 0,487, r = 0,83).

. **Cambio 3 y Combinación 1** (C = 0,487, r = 0,83).

. **Combinación 2 e Igualación 1** (C = 0,468, r = 0,814).

. **Combinación 2 e Igualación 2** (C = 0,468, r = 0,814).

Los problemas Cambio 1, Cambio 5 e Igualación 4 no aparecen vinculados a ningún otro.

Relación entre la comprensión de los términos comparativos y la solución a los problemas de Comparación .

Por medio del estadístico ji-cuadrado hemos tratado de averiguar si los niños que comprenden con seguridad y sin mediar explicación los términos comparativos, obtienen mejores resultados en los problemas comparativos que aquellos que han necesitado explicación y se les ha modificado la presentación del problema.

Cuando tenemos en cuenta el **conjunto de la muestra**, sólo hemos encontrado relación significativa con los problemas **Comparación 2** con números grandes (C=0,355, equivalente a r=0,709) y **Comparación 3** tanto con números grandes (C=0,449, equivalente a r=0,80) como con pequeños (C=0,327, equivalente a r=0,68). En estos tres casos se aprecian diferencias significativas entre los que comprenden los términos comparativos y los que han necesitado explicación. A pesar de la explicación proporcionada, un número importante de niños no llega a solucionarlos, mientras que la totalidad de los que no la necesitan los resuelven bien.

En **EGB**, no puede rechazarse la hipótesis nula en ninguno de los problemas. Es decir, cuando a los niños se les proporciona una explicación, los resultados en los problemas comparativos son semejantes a los de aquéllos que no la necesitan. Sin llegar a ser significativa, la diferencia entre unos niños y otros la encontramos en el problema de Comparación 3 con números grandes (sin corrección de Yates se rechaza la hipótesis nula).

En **Preescolar** obtenemos una ji-cuadrado con corrección de continuidad que resulta significativa al nivel establecido, entre la comprensión de los términos comparativos y el problema de **Comparación 3** con **números grandes.** El coeficiente de contingencia es de 0,526, que equivale a r = 0,862. Si no aplicamos la corrección, encontramos también como significativa la relación con **Comparación 2** (números grandes), corroborándose la significatividad por medio de la prueba de la probabilidad exacta de Fisher (p=0.04). El coeficiente de Contingencia es de 0,439, equivalente a r=0,788.

5.2. ESTRATEGIAS UTILIZADAS EN LA SOLUCION DE LOS PROBLEMAS ARITMETICOS DE ENUNCIADO VERBAL

En nuestro intento de estudiar los procesos cognoscitivos implicados en la solución de los problemas aritméticos que se presentan verbalmente, hemos tratado de analizar el tipo de estrategias y los errores cometidos por los niños en cada uno de ellos.

Por lo que se refiere a la evaluación de las estrategias, hemos tomado como punto de referencia la clasificación propuesta por Carpenter y Moser (1.982, 1.983, 1.984), introduciendo las modificaciones oportunas para ajustarla a los datos recogidos en nuestro estudio, tal y como se describe en el apartado "Valoración de las pruebas".

A través de las entrevistas individuales, observando minuciosamente las acciones de los niños y su modo de contar y pidiéndoles aclaración acerca de su forma de proceder, hemos delimitado los procedimientos seguidos en cada uno de los problemas.

En esta valoración no hemos tenido en cuenta el tamaño del número, ya que los problemas no se han aplicado sistemáticamente a todos los niños en las dos magnitudes. Como se recordará, a los niños de EGB se comenzó por presentar los problemas con números grandes y sólo cuando fallaban o quedaba alguna duda acerca de su comprensión, se presentaba el problema paralelo utilizando números pequeños. En el caso de los preescolares, intentando ajustarnos a su nivel de conocimientos (en clase sólo cuentan hasta el 9), se presentó en primer lugar los problemas con números pequeños y cuando los resolvían se presentaban los que utilizan números mayores.

No obstante, hemos de tener en cuenta que, según Carpenter y Moser (1.984, pag.190), "no hay diferencias significativas en las estrategias usadas para resolver problemas bajo estas dos condiciones" y, de hecho, en nuestro caso, cuando a los niños se les ha aplicado los problemas con los dos tamaños del número, las variaciones en los procedimientos seguidos han sido mínimas. Con todo, y para evitar confusiones a la hora de contabilizar el tipo de estrategias en cada problema, hemos decidido que siempre que los niños resuelven un problema con números grandes, es este dato el que se tiene presente, recogiendo la estrategia seguida en los problemas con números pequeños sólo cuando son los únicos resueltos correctamente. Para abundar en la claridad, en las tablas se especifica si la estrategia se ha empleado en la solución de problemas con números pequeños mediante el uso de los caracteres en negrita .

Vamos a presentar los resultados considerando separadamente cada uno de los diecisiete problemas que han sido presentados a los niños a lo largo de las distintas entrevistas. Seguiremos un proceso analítico : comenzando por expresar globalmente las estrategias utilizadas por el conjunto de la muestra , pasaremos a tener en cuenta luego los resultados según los cursos para terminar por circunscribir, dentro de ellos, los encontrados en cada nivel de rendimiento.

De este modo, para cada uno de los problemas introducimos, en primer lugar, una **tabla de frecuencias** donde se especifica el número de niños por curso, así como el total de ellos, que utilizan las distintas estrategias definidas, seguida por su correspondiente **tabla de porcentajes**.

Tratamos de expresar estos resultados por medio de dos gráficos : en el primero de ellos se totalizan las estrategias encontradas en el **conjunto de la muestra** y en el segundo, pueden compararse los resultados obtenidos en los distintos **cursos escolares**.

Las estrategias seguidas por el total del grupo estudiado se presentan en un gráfico circular, donde cada área sombreada representa el porcentaje de niños que usan la indicada estrategia o bien el porcentaje de niños que no son capaces de resolver el problema.

Cuando comparamos las estrategias seguidas en cada curso, utilizamos un gráfico de columnas totalizadas, que representan el porcentaje de niños que siguen una u otra estrategia. La altura total de cada columna indica el porcentaje de niños que en ese curso usaron una estrategia que les llevó a resolver correctamente el problema.

A continuación, en una nueva tabla, analizamos con más detalle los datos hallados en cada curso, contrastando los procedimientos que siguen los niños de distinto **nivel de rendimiento**

Esta tabla de frecuencias y porcentajes dá lugar a cuatro gráficos, correspondientes a 1º y 2º de Preescolar y 1º y 2º de EGB, en los que, por medio también de columnas totalizadas, se expresan los porcentajes de niños de cada nivel de rendimiento que siguen cada una de las estrategias indicadas.

PROBLEMA CAMBIO 1 (Cambio-Juntar. Resultado desconocido).

Tabla 5.2.1 : Número de niños que en cada curso y utilizan los distintos tipos de estrategias

Estrategias	1ºPreesc	2ºPree	1ºEGB	2ºEGB	Total
Contar todo con modelos	5 + 6	10 + 2	8	1	32
Contar desde el 1º	0	0	4	6	10
Dato memorizado	0	0	0	3	3
Dato derivado	0	0	0	2	2

Tabla 5.2.2 : Porcentaje de niños por curso y en el conjunto de la muestra que usan tales estrategias.

Estrategias	1ºPreesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Contar todo con modelos	91,66	100	66,66	8,33	66.67
Contar desde el 1º	0	0	33,33	50	20,83
Dato memorizado	0	0	0	25	6,25
Dato derivado	0	0	0	16,66	4,17

Representación gráfica de las estrategias utilizadas en Cambio 1 :

Gráfico 5.2.1 : Muesrtra total

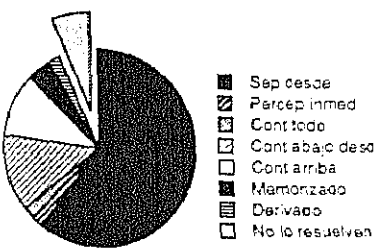


Gráfico 5.2.2 : Por cursos

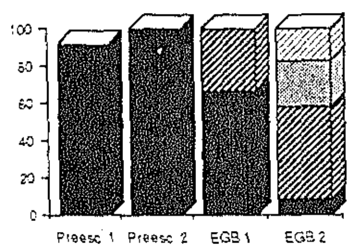


Tabla 5.2.3 : Frecuencias y porcentajes de niños que utilizan las estrategias indicadas en el problema Cambio 1, según niveles de rendimiento dentro de cada curso.

Curso	Estrategias	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel Bajo
1ºPreesc	Contar todo con modelos	4 (100%)	1 + 3 (100%)	3(75%)
2ºPreesc	Contar todo con modelos	4 (100%)	4(100%)	2 + 2(100%)
1º EGB	Contar todo con modelos	1 (25%)	3 (75%)	4 (100%)
	Contar desde el 1ºsumando	3 (75%)	1 (25%)	0
2º EGB	Contar todo con modelos	0	1 (25%)	0
	Contar desde el 1ºsumando	2 (50%)	1 (25%)	3 (75%)
	Dato memorizado	1 (25%)	2 (50%)	0
	Dato derivado	1 (25%)	0	1 (25%)

Representación gráfica de las estrategias utilizadas en cada curso :

Gráfico 5.2.3 : 1º de Preescolar

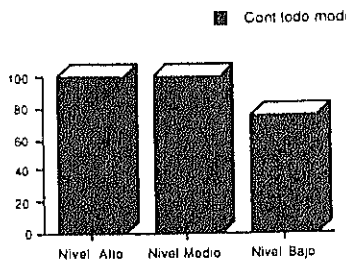


Gráfico 5.2.4 : 2º de Preescolar

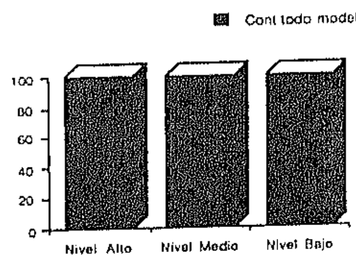


Gráfico 5.2.5 : 1º de EGB

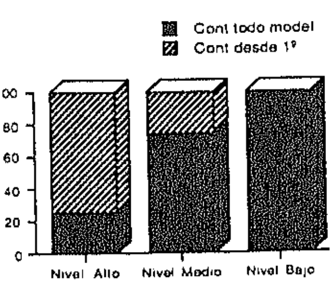
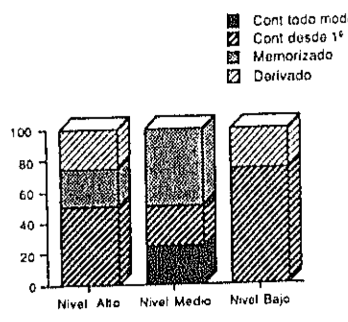


Gráfico 5.2.6 : 2º de EGB



PROBLEMA CAMBIO 2 (Cambio-Separar. Resultado desconocido)

Tabla 5.2.4 : Número de niños que en cada curso utilizan los distintos tipos de estrategias

Estrategias	1ºPreesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Separar desde	5 + 4	11	9	1	30
Percepción inmediata	1	0	0	0	1
Contar hacia abajo desde	0	0	2	4	6
Contar hacia arriba	0	0	1	4	5
Dato memorizado	0	0	0	2	2
Dato derivado	0	0	0	1	1

Tabla 5.2.5 : Porcentaje de niños que en cada curso usa los distintos tipos de estrategias

Estrategias	1ºPreesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Separar desde	75	91,66	75	8,33	62,5
Percepción inmediata	8,33	0	0	0	2,08
Contar hacia abajo desde	0	0	16,66	33,33	12,50
Contar hacia arriba	0	0	8,33	33,33	10,42
Dato memorizado	0	0	0	16,66	4,17
Dato derivado	0	0	0	8,33	2,08

Representación gráfica de las estrategias utilizadas en Cambio 2:

Gráfico 5.2.7 : Muestra total

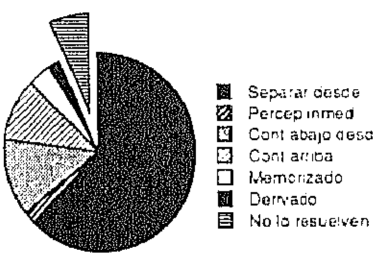


Gráfico 5.2.8 : Por cursos

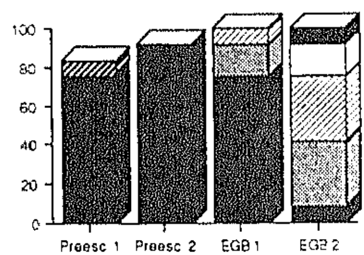


Tabla 5.2.6 : Frecuencias y porcentajes de niños que utilizan las estrategias indicadas en el problema Cambio 2, según el curso y los niveles de rendimiento.

Curso	Estrategias	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel Bajo
1ºPreesc	Percepción inmediata	1(25%)	0	0
	Separar desde	3 (75%)	2 + 2 (100%)	2 (50%)
2ºPreesc	Separar desde	4 (100%)	4 (100%)	3 (75%)
1º EGB	Separar desde	1 (25%)	4 (100%)	4 (100%)
	Contar hacia arriba	1 (25%)	0	0
	Contar hacia abajo desde	2 (50%)	0	0
2º EGB	Separar desde	0	1 (25%)	0
	Contar hacia arriba	0	1 (25%)	3 (75%)
	Contar hacia abajo desde	2 (50%)	1 (25%)	1 (25%)
	Dato memorizado	1 (25%)	1 (25%)	0
	Dato derivado	1 (25%)	0	0

Representación gráfica de las estrategias utilizadas en el problema Cambio 2 según niveles de rendimiento dentro de cada curso :

Gráfico 5.2.9.: 1º de Preescolar

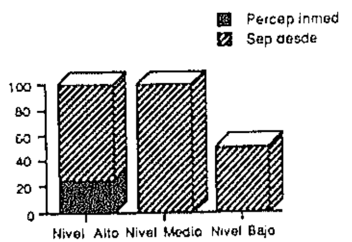


Gráfico 5.2.10 : 2º de Preescolar

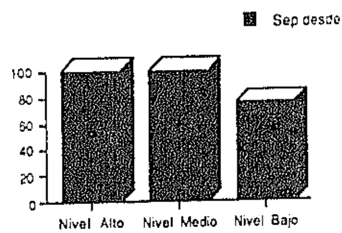


Gráfico 5.2.11 : 1º de EGB

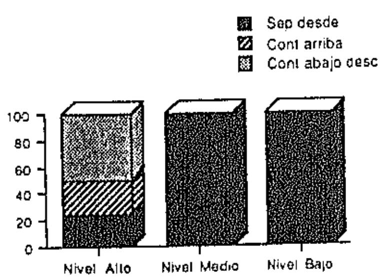
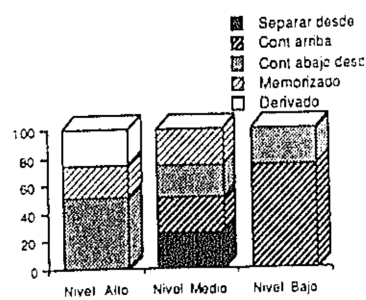


Gráfico 5.2.12 : 2º de EGB



PROBLEMA CAMBIO 3 (Cambio-Juntar. Cambio desconocido)

Tabla 5.2.7 : Número de niños por curso y en el total de la muestra que utilizan cada tipo de estrategia

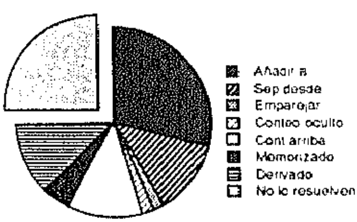
Estrategias	1ºPreesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Añadir a	2	2 + 2	6 + 1	1	14
Separar desde	1	3 + 1	1	0	6
Emparejar	0	1	0	0	1
Conteo oculto	1	0	0	0	1
Contar hacia arriba desde	0	0	2	4	6
Dato memorizado	0	0	0	2	2
Dato derivado	0	0	1	5	6

Tabla 5.2.8 : Porcentajes de niños por curso y del total de la muestra que utilizan cada estrategia

Estrategias	1ºPreesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Añadir a	16,66	33,33	58,33	8,33	29,17
Separar desde	8,33	33,33	8,33	0	12,50
Emparejar	0	8,33	0	0	2,08
Conteo oculto	8,33	0	0	0	2,08
Contar hacia arriba desde	0	0	16,66	33,33	12,50
Dato memorizado	0	0	0	16,66	4,17
Dato derivado	0	0	8,33	41,66	12,50

Representación gráfica de las estrategias utilizadas en el problema Cambio 3 :

Gráfico 5.2.13 : Muestra total **Gráfico 5.2.14 : Por cursos**



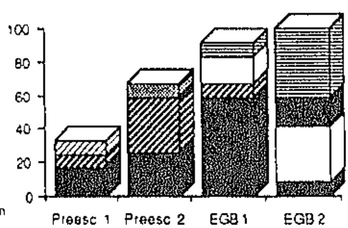


Tabla 5.2.9 : Frecuencias y porcentajes de niños que utilizan las distintas estrategias, según el curso y los niveles de rendimiento

Curso	Estrategias	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel Bajo
	Añadir a	2 (50%)	0	0
1ºPreesc	Separar desde	0	1 (25%)	0
	Conteo oculto	1 (25%)	0	0
	Añadir a	1 (25%)	1 + 1 (50%)	1 (25%)
2ºPreesc	Separar desde	1 + 1 (50%)	1 (25%)	1 (25%)
	Emparejar	1 (25%)	0	0
	Añadir a	1 (25%)	4 (100%)	1 + 1 (50%)
	Separar desde	0	0	1 (25%)
1º EGB	Contar hacia arriba	2 (50%)	0	0
	Dato derivado	1 (25%)	0	0
	Añadir a	0	1 (25%)	0
	Contar hacia arriba	2 (50%)	0	2 (50%)
2º EGB	Dato memorizado	0	2 (50%)	0
	Dato derivado	2 (50%)	1 (25%)	2 (50%)

Representación gráfica de las estrategias utilizadas en cada curso según los niveles de rendimiento :

Gráfico 5.2.15 : 1º de Preescolar

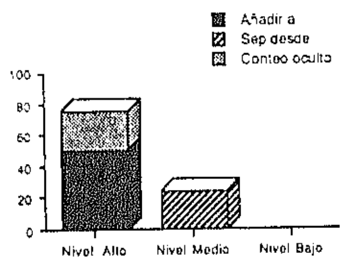


Gráfico 5.2.16 : 2º de Preescolar

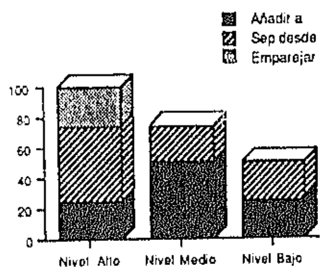


Gráfico 5.2.17 : 1º de EGB

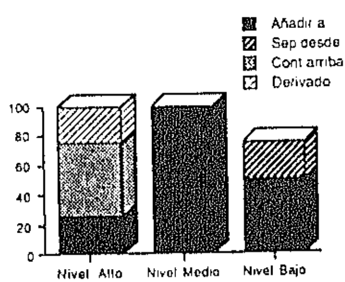
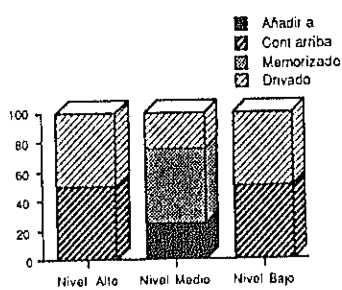


Gráfico 5.2.18 : 2º de EGB



PROBLEMA CAMBIO 4 (Cambio-Separar. Cambio desconocido)

Tabla 5.2.10 : Número de niños por curso y en total que utilizan las distintas estrategias

Estrategias	1ºPreesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Separar desde	4	7 + 1	6	1	19
Separar hasta	1	1 + 1	2	1	6
Emparejar	0	1	0	0	2
Añadir a	0	0	1	0	1
Separar desde emparej	0	1	0	0	1
Conteo oculto	1	0	0	0	1
Contar todo sin modelos	1	0	0	0	1
Contar hacia arriba	0	0	1	2	3
Contar hacia abajo hasta	0	0	1	4	5
Contar hacia abajo desde	0	0	0	1	1
Dato memorizado	0	0	0	1	1
Dato derivado	0	0	1	2	3

Tabla 5.2.11 : Porcentaje de niños por curso y del conjunto de la muestra que usan cada estrategia

Estrategias	1ºPreesc	2ºPreesc	1º EGB	2º EGB	Total
Separar desde	33,33	66,66	50	8,33	39,58
Separar hasta	8,33	16,66	16,66	8,33	12,50
Emparejar	0	8,33	0	0	2,08
Añadir a	0	0	8,33	0	2,08
Separar desde emparej	0	8,33	0	0	2,08
Conteo oculto	8,33	0	0	0	2,08
Contar todo sin modelos	8,33	0	0	0	2,08
Contar hacia arriba	0	0	8,33	16,66	6,25
Contar hacia abajo hasta	0	0	8,33	33,33	10,42
Contar hacia abajo desde	0	0	0	8,33	2,08
Dato memorizado	0	0	0	8,33	2,08
Dato derivado	0	0	8,33	16,66	6,25

Representación gráfica de las estrategias utilizadas en Cambio 4:

Gráfico 5.2.19 : Muestra total

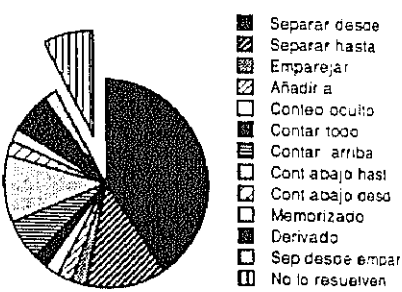


Gráfico 5.2.20 : Por cursos

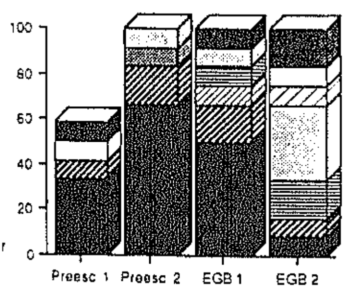


Tabla 12 : Frecuencias y porcentajes de niños que utilizan los distintos tipos de estrategias en el problema Cambio 4, según el curso y los niveles de rendimiento

Curso	Estrategias	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel Bajo
1ºPreesc	Separar desde	2 (50%)	2 (50%)	0
	Separar hasta	0	0	1 (25%)
	Conteo oculto	1 (25%)	0	0
	Contar hacia arriba	0	1	0
2ºPreesc	Separar desde	3 (75%)	3 (75%)	1 + 1 (50%)
	Separar hasta	0	1 (25%	1 (25%)
	Emparejar	1 (25%)	0	0
	Separar desde empar.	0	0	1 (25%)
1º EGB	Separar desde	1 (25%)	3 (75%)	2 (50%)
	Separar hasta	0	1 (25%)	1 (25%)
	Añadir a	0	0	1 (25%)
	Contar hacia arriba	1 (25%)	0	0
	Contar abajo hasta	1 (25%)	0	0
	Dato derivado	1 (25%)	0	0
2º EGB	Separar desde	0	0	1(25%)
	Separar hasta	0	1 (25%)	0
	Contar hacia arriba	0	1 (25%)	1 (25%)
	Contar abajo hasta	3 (75%)	0	1 (25%)
	Contar abajo desde	0	1 (25%)	0
	Dato memorizado	0	1 (25%)	0
	Dato derivado	1 (25%)	0	1 (25%)

Representación gráfica de las estrategias utilizadas en el problema Cambio 4 según niveles de rendimiento dentro de cada curso

Gráfico 5.2.21 : 1º de Preescolar

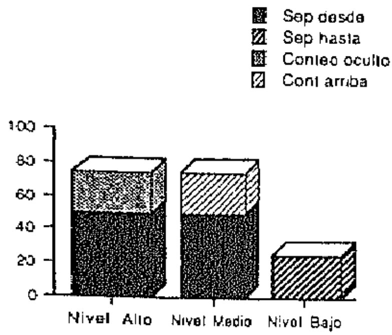


Gráfico 5.2.22 : 2º de Preescolar

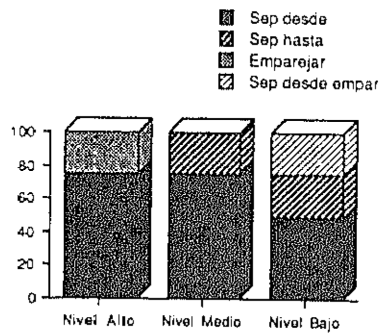


Gráfico 5.2.23 : 1º de EGB

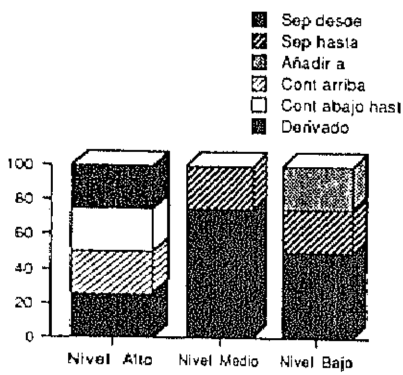
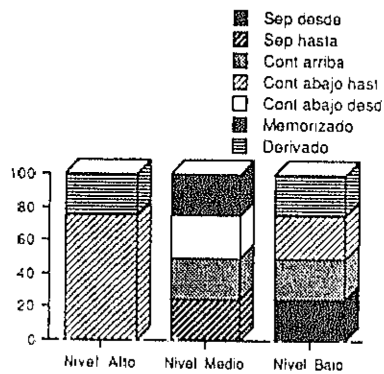


Gráfico 5.2. 24 : 2º de EGB



PROBLEMA CAMBIO 5 (Cambio-Juntar. Comienzo desconocido)

Tabla 5.2.13 : Número de niños en cada curso y en el total de la muestra que utiliza cada estrategia :

Estrategias	1ºPreesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Añadir a	0	0	0	1	1
Separar desde	1	0	6	0	7
Tanteo	0	1	0	0	1
Contar hacia arriba	1	0	2	4	7
Contar hacia abajo	0	0	0	1	1
Dato memorizado	0	0	1	6	7

Tabla 5.2.14 : Porcentaje de niños por curso y en el conjunto de la muestra que usan cada estrategia

Estrategias	1ºPreesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Añadir a	0	0	0	8,33	2,08
Separar desde	8,33	0	50	0	14,58
Tanteo	0	8,33	0	0	2,08
Contar hacia arriba	8,33	0	16,66	33,33	14,58
Contar hacia abajo desde	0	0	0	8,33	2,08
Dato memorizado	0	0	8,33	50	14,58

Representación gráfica de las estrategias utilizadas en Cambio 5 :

Gráfico 5.2.25 : Muestra total

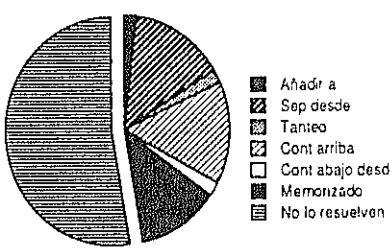


Gráfico 5.2. 26 : Por cursos

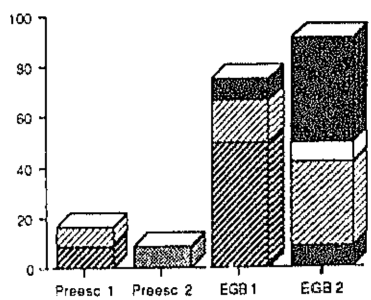


Tabla 5.2.15 : Frecuencias y porcentajes de los niños que utilizan las estrategias indicadas en el problema Cambio 5, según los niveles de rendimiento dentro de cada curso

Curso	Estrategias	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel Bajo
1ºPreesc	Separar desde	1 (25%)	0	0
	Contar hacia arriba	1 (25%)	0	0
2ºPreesc	Tanteo	1 (25%)	0	0
1ºEGB	Separar desde	2 (50%)	3 (75%)	1 (25%)
	Contar hacia arriba	2 (50%)	0	0
	Dato memorizado	0	1 (25%)	0
2ºEGB	Añadir a	0	1 (25%)	0
	Contar hacia arriba	1 (25%)	1 (25%)	2 (50%)
	Contar abajo desde	0	1 (25%)	0
	Dato memorizado	3 (75%)	1 (25%)	1 + 1 (50%)

Representación gráfica de las estrategias utilizadas según niveles de rendimiento :

Gráfico 5.2.27 : 1º Preescolar

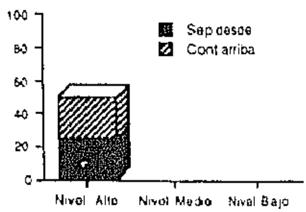


Gráfico 5.2.28 : 2º de Preescolar

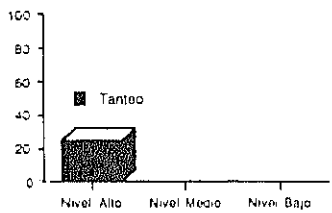


Gráfico 5.2.29 : 1º de EGB

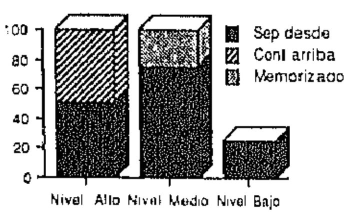
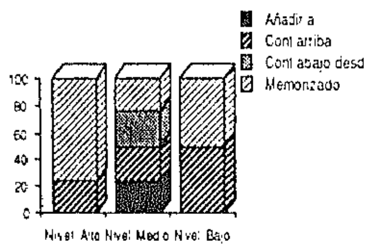


Gráfico 5.2. 30 : 2º de EGB



PROBLEMA CAMBIO 6 (Cambio-Separar. Comienzo desconocido)

Tabla 5.2.16 : Número de niños que utiliza cada estrategia por cursos y en el conjunto de la muestra

Estrategias	1ºPreesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Contar todo con modelos	2 + 6	7 + 3	8 + 1	1	28
Tanteo	0	0	1	2	3
Contar todo sin modelos	1	0	0	0	1
Contar desde el 1ºsumando	0	1	2	5	8
Dato memorizado	0	0	0	3	3
Dato derivado	0	0	0	3	3

Tabla 5.2.17 : Porcentaje de niños que utilizan las estrategias señaladas en cada curso y en el total

Estrategias	1ºPreesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Contar todo con modelos	66,67	83,33	75	8,33	58,33
Tanteo	0	0	8,33	16,66	6,25
Contar todo sin modelos	8,33	0	0	0	2,08
Contar desde el 1ºsumando	0	8,33	16,66	41,66	16,67
Dato memorizado	0	0	0	8,33	2,08
Dato derivado	0	0	0	25	6,25

Representación gráfica de las estrategias utilizadas en Cambio 6 :

Gráfico 5.2.31 : Muestra total

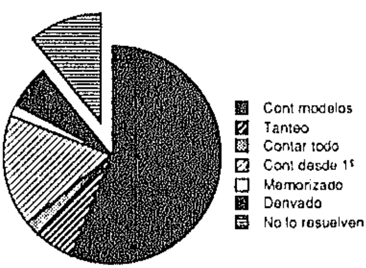


Gráfico 5.2.32 : Por cursos

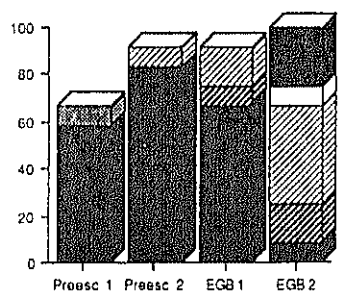


Tabla 5.2.18 : Frecuencias y porcentajes de niños que utilizan las estrategias indicadas en el problema Cambio 6, según los niveles de rendimiento dentro de cada curso

Curso	Estrategias	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel Bajo
1ºPreesc	Contar todo modelos	2 + 2 (100%)	3 (75%)	1 (25%)
	Contar todo sin modelos	0	0	1 (25%)
2ºPreesc	Contar todo modelos	3 (75%)	3 + 1 (100%)	1 + 2 (75%)
	Contar desde 1ºsumando	1 (25%)	0	0
1º EGB	Contar todo modelos	1 (25%)	4 (100%)	3 + 1 (100%)
	Separar desde tanteando	1 (25%)	0	0
	Contar desde 1ºsumando	2 (50%)	0	0
2º EGB	Contar todo modelos	0	0	1 (25%)
	Tanteo	0	1 (25%)	1 (25%)
	Contar desde 1ºsumando	2 (50%)	2 (50%)	1 (25%)
	Dato memorizado	0	1 (25%)	0
	Dato derivado	2 (50%)	0	1 (25%)

Representación gráfica de las estrategias utilizadas según rendimiento :

Gráfico 5.2. 33 : 1º de Preescolar

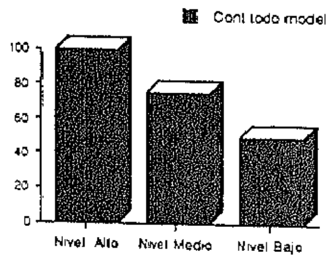


Gráfico 5.2. 34 : 2º de Preescolar

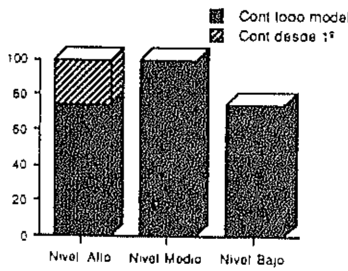


Gráfico 5.2. 35 : 1º de EGB

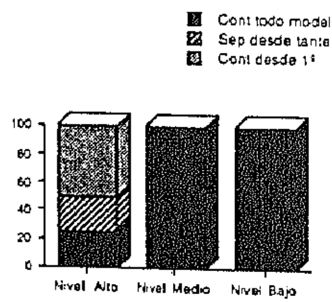
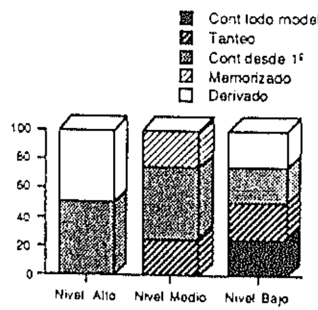


Gráfico 5.2.36 : 2º de EGB



PROBLEMA COMBINACION 1 (Desconocido el total)

Tabla 5.2.19 : Frecuencia en la utilización de las distintas estrategias por cursos y en el total

Estrategias	1ªPreesc	2ªPreesc	1ªEGB	2ªEGB	Total
Contar todo modelos	3 + 4	11 + 1	9 + 1	2	31
Contar desde el mayor	0	0	2	4	6
Dato memorizado	0	0	0	1	1
Dato derivado	0	0	0	5	5

Tabla 5.2.20 : Porcentaje de niños que utilizan las estrategias indicadas en cada curso y en el total

Estrategias	1ªPreesc	2ªPreesc	1ªEGB	2ªEGB	Total
Contar todo modelos	58,33	100	83,33	16,66	64,58
Contar desde el mayor	0	0	16,66	33,33	12,50
Dato memorizado	0	0	0	8,33	2,08
Dato derivado	0	0	0	41,66	10

Representación gráfica de las estrategias utilizadas en Combinación 1

Gráfico 5.2.37 : Muestra total

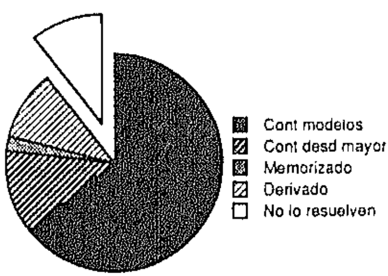


Gráfico 5.2.38 : Por cursos

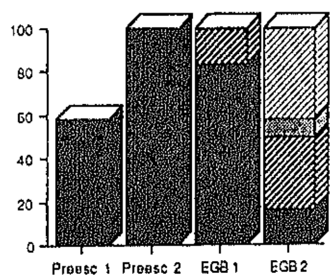


Tabla 5.2.21 : Frecuencias y porcentajes de niños que utilizan las estrategias indicadas en el problema Combinación 1, según los niveles de rendimiento dentro de cada curso

Curso	Estrategias	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel Bajo
1º Preesc	Contar todo modelos	3 + 1 (100%)	3 (75%)	0
2º Preesc	Contar todo modelos	4 (100%)	4 (100%)	3 + 1 (100%)
1º EGB	Contar todo modelos	2 (50%)	4 (100%)	3 + 1 (100%)
	Contar desde el mayor	2 (50%)	0	0
2º EGB	Contar todo modelos	0	1 (25%)	1 (25%)
	Contar desde el mayor	0	2 (50%)	2 (50%)
	Dato memorizado	0	1 (25%)	0
	Dato derivado	4 (100%)	0	1 (25%)

Representación gráfica de las estrategias utilizadas según niveles de rendimiento :

Gráfico 5.2.39 : 1º de Preescolar

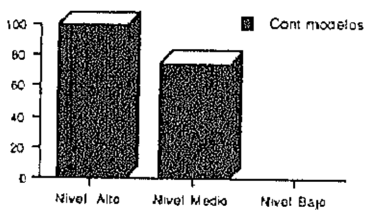


Gráfico 5.2.40 : 2º de Preescolar

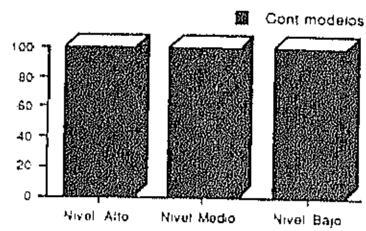


Gráfico 5.2.41 : 1º de EGB

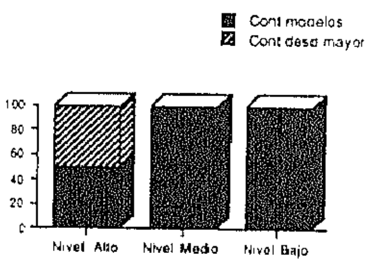
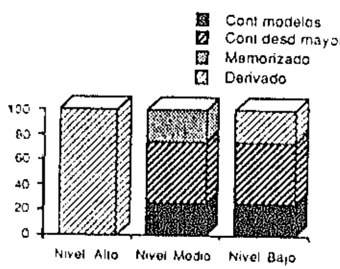


Gráfico 5.2.42 : 2º de EGB



PROBLEMA COMBINACION 2 (Desconocida una parte)

Tabla 5.2.22 : Frecuencia en la utilización de las distintas estrategias por cursos y en el total

Estrategias	1ºPreesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Separar desde	2 + 2	6 + 1	7	1	19
Añadir a	0	1	2	1	4
Conteo oculto	1	0	0	0	1
Contar hacia arriba	0	1	1	3	5
Dato memorizado	0	0	0	3	3
Dato derivado	0	0	0	4	4

Tabla 5.2.23 : Porcentaje de niños que utilizan las estrategias indicadas en cada curso y en el total

Estrategias	1ºPreesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Separar desde	33,33	58,33	58,33	8,33	39,58
Añadir a	0	8,33	16,66	8,33	8,33
Conteo oculto	8,33	0	0	0	2,08
Contar hacia arriba	0	8,33	8,33	25	10,42
Dato memorizado	0	0	0	25	6,25
Dato derivado	0	0	0	33,33	8,33

Representación gráfica de las estrategias utilizadas en el problema Combinación 2

Gráfico 5.2.43 : Muestra total

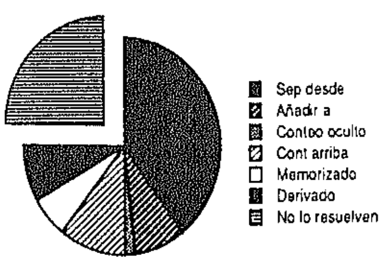


Gráfico 5.2.44 : Por cursos

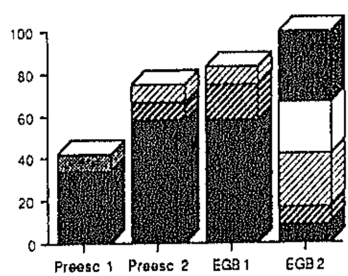


Tabla 5.2.24 : Frecuencias y porcentajes de niños que utilizan las estrategias indicadas en el problema Combinación 2. según los niveles de rendimiento dentro de cada curso

Curso	Estrategias	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel Bajo
1ºPreesc	Separar desde	2 (50%)	2 (50%)	0
	Conteo oculto	1 (25%)	0	0
	Separar desde	2 (50%)	3 + 1 (100%)	1 (25%)
2ºPreesc	Añadir a	1 (25%)	0	0
	Contar hacia arriba	1 (25%)	0	0
	Separar desde	2 (50%)	3 (75%)	2 (50%)
1ºEGB	Añadir a	1 (25%)	1 (25%)	0
	Contar hacia arriba	1 (25%)	0	0
	Separar desde	0	0	1 (25%)
	Añadir a	0	1 (25%)	0
2ºEGB	Contar hacia arriba	0	1 (25%)	2 (50%)
	Dato memorizado	1 (25%)	2 (50%)	0
	Dato derivado	3 (75%)	0	1 (25%)

Representación gráfica de las estrategias utilizadas según niveles de rendimiento :

Gráfico 5.2.45 : 1º de Preescolar

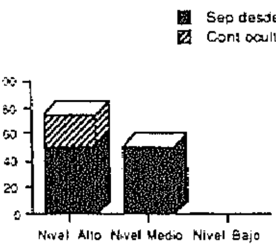


Gráfico 5.2.46 : 2º de Preescolar

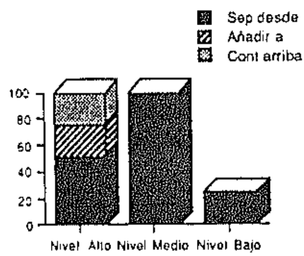


Gráfico 5.2.47 : 1º de EGB

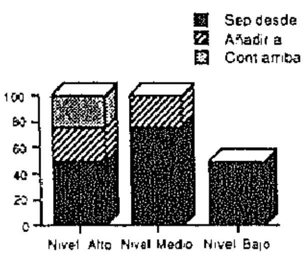
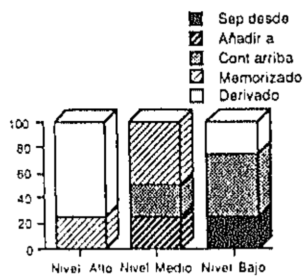


Gráfico 5.2.48 : 2º de EGB



PROBLEMA COMPARACION 1 (Desconocida la diferencia)

Tabla 5.2.25 : Frecuencia en la utilización de las distintas estrategias por cursos y en total

Estrategias	1ºPreesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Separar desde	2	0	2	0	4
Separar desde emparej	1 + 1	5	3	0	10
Separar hasta	2	1	0	0	3
Separar hasta emparej	1	0	0	0	1
Emparejar	0	4 + 1	2 + 1	0	8
Añadir a	0	0	1	1	2
Percepción inmediata	0	1	0	0	1
Contar hacia abajo hasta	0	0	2	1	3
Contar hacia arriba	0	0	0	5	5
Dato memorizado	0	0	1	1	2
Dato derivado	0	0	0	4	4

Tabla 5.2.26 : Porcentaje de niños que utilizan las estrategias indicadas, en cada curso y globalmente

Estrategias	1ºPreesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Separar desde	16,66	0	16,66	0	8,33
Separar desde emparej	16,66	41,66	25	0	20,83
Separar hasta	16,66	8,33	0	0	6,25
Separar hasta emparej	8,33	0	0	0	2,08
Emparejar	0	41,66	25	0	16,67
Añadir a	0	0	8,33	8,33	4,17
Percepción inmediata	0	8,33	0	0	2,08
Contar hacia abajo hasta	0	0	16,66	8,33	6,25
Contar hacia arriba	0	0	0	41,66	10,42
Dato memorizado	0	0	8,33	8,33	4,17
Dato derivado	0	0	0	33,33	8,33

Representación gráfica de las estrategias utilizadas en Comparación 1 :

Gráfico 5.2.49 : Muestra total

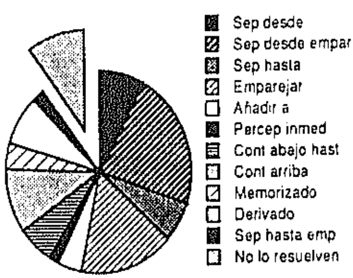


Gráfico 5.2.50 : Por cursos

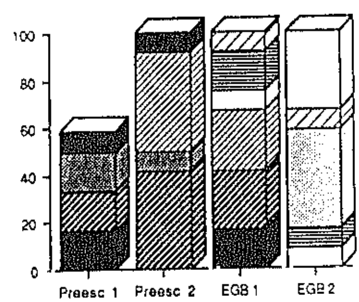


Tabla 27 : Frecuencias y porcentajes de niños que utilizan las estrategias señaladas en el problema Comparación 1, teniendo en cuenta los niveles de rendimiento dentro de cada curso

Curso	Estrategias	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel Bajo
1ºPreesc	Separar desde	1 (25%)	1 (25%)	0
	Separar desde emparej	1 (25%)	1 (25%)	0
	Separar hasta	2 (50%)	0	0
	Separar hasta emparej	0	1 (25%)	0
2ºPreesc	Separar desde emparej	2 (50%)	3 (75%)	0
	Emparejar	2 (50%)	0	2 + 1 (75%)
	Separar hasta	0	1 (25%)	0
	Percepción inmediata	0	0	1 (25%)
1º EGB	Separar desde	1 (25%)	0	1 (25%)
	Separar desde emparej	0	2 (50%)	1 (25%)
	Añadir a	0	1 (25%)	0
	Emparejar	1 (25%)	0	1 + 1 (50%)
	Contar hacia abajo hasta	2 (50%)	0	0
	Dato memorizado	0	1 (25%)	0
2º EGB	Añadir a	0	1 (25%)	0
	Contar hacia arriba	2 (50%)	1 (25%)	2 (50%)
	Contar hacia abajo hasta	0	0	1 (25%)
	Dato memorizado	0	1 (25%)	0
	Dato derivado	2 (50%)	1 (25%)	1 (25%)

Representación gráfica de las estrategias utilizadas en el problema Comparación 1, según niveles de rendimiento en cada uno de los cursos :

Gráfico 5.2.51 : 1º de Preescolar

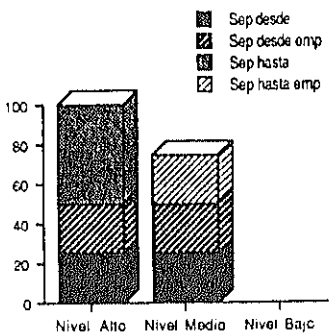


Gráfico 5.2.52 : 2º de Preescolar

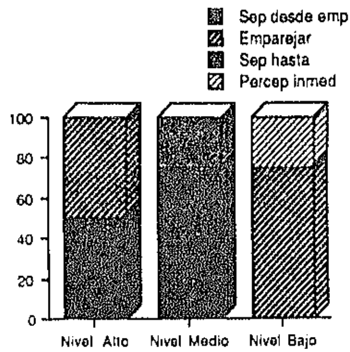


Gráfico 5.2.53 : 1º de EGB

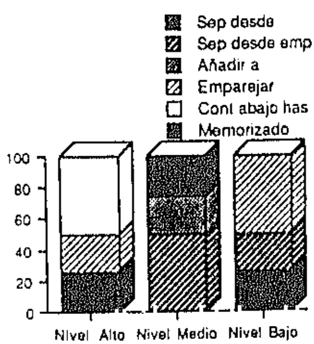
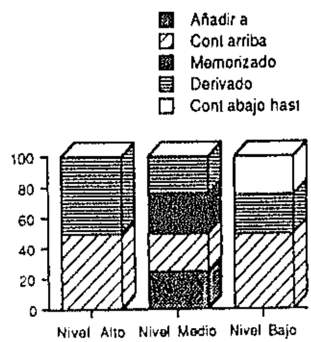


Gráfico 5.2.54 : 2º de EGB



PROBLEMA COMPARACION 2 (Desconocida cantidad de comparación)

Tabla 5.2.28 : Número de niños que usan las distintas estrategias por cursos y en el total de la muestra

Estrategias	1ºPreesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Contar todo modelos	1 + 4	6 + 5	8 + 2	1	27
Cont todo modelos empar	2	0	1	0	3
Emparejar	0	1	0	0	1
Contar desde el 1º	0	0	0	2	2
Contar desde el mayor	0	0	1	3	4
Dato memorizado	0	0	0	2	2
Dato derivado	0	0	0	4	4

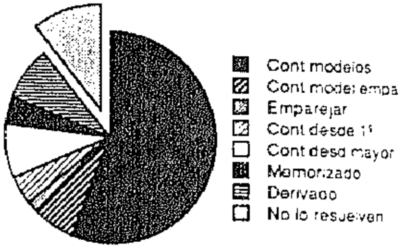
Tabla 5.2.29 : Porcentaje de niños que emplean las estrategias señaladas por cursos y en el total

Estrategias	1ºPreesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Contar todo modelos	41,66	91,66	83,33	8,33	56,25
Cont modelos empar	16,66	0	8,33	0	6,25
Emparejar	0	8,33	0	0	2,08
Contar desde el 1º	0	0	0	16,66	4,17
Contar desde el mayor	0	0	8,33	25	8,33
Dato memorizado	0	0	0	16,66	4,17
Dato derivado	0	0	0	33,33	8,33

Representación gráfica de las estrategias utilizadas en Comparación 2

Gráfico 5.2.55 : Muestra total

Gráfico 5.2.56 : Por cursos



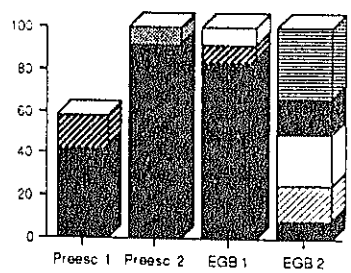


Tabla 5.2.30 : Frecuencias y porcentajes de los niños que utilizan las estrategias indicadas en el problema Comparación 2, según los niveles de rendimiento dentro de cada curso.

Curso	Estrategias	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel Bajo
1º Preesc	Contar todo con modelos	1 (25%)	3 (75%)	1 (25%)
	Cont todo modelos emparej	2 (50%)	0	0
2º Preesc	Contar todo con modelos	4 (100%)	2 + 2 (100%)	3 (75%)
	Emparejar	0	0	1 (25%)
1º EGB	Contar todo con modelos	3 (75%)	4 (100%)	1 + 2 (75%)
	Cont todo modelos emparej	0	0	1 (25%)
	Contar desde el mayor	1 (25%)	0	0
2º EGB	Contar todo con modelos	0	1 (25%)	0
	Contar desde el 1º sumando	1 (25%)	1 (25%)	0
	Contar desde el mayor	0	0	3 (75%)
	Dato memorizado	1 (25%)	1 (25%)	0
	Dato derivado	2 (50%)	1 (25%)	1 (25%)

Representación gráfica de las estrategias utilizadas según el rendimiento :

Gráfico 5.2.57 : 1º de Preescolar

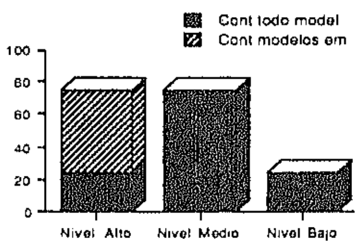


Gráfico 5.2.58 : 2º de Preescolar

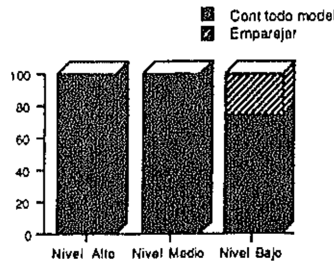


Gráfico 5.2.59 : 1º de EGB

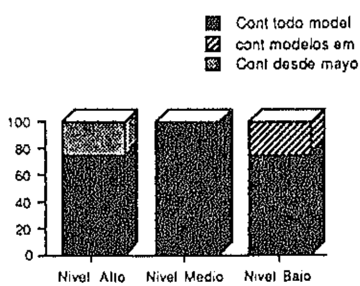
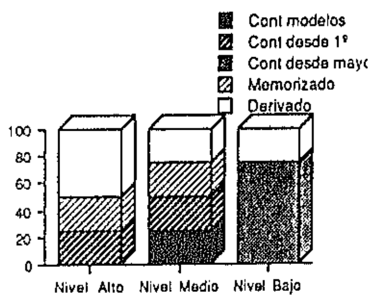


Gráfico 5.2.60 : 2º de EGB



PROBLEMA COMPARACION 3 (Referente desconocido)

Tabla 5.2.31 : Frecuencia en la utilización de las distintas estrategias por cursos y en el total.

Estrategias	1ºPreesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Separar desde	0	2 + 1	5 + 1	1	10
Separar desde emparej	1	0	0	0	1
Emparejar	1	1 + 1	1	0	4
Añadir a	0	0	0	1	1
Percepción inmediata	4	1	1	0	6
Conteo oculto	0	0	1	0	1
Contar hacia abajo desde	0	0	1	3	4
Contar hacia arriba	0	0	0	2	2
Dato memorizado	0	0	0	1	1
Dato derivado	0	0	0	4	4
?		1			

Tabla 5.2.32 : Porcentaje de niños que utilizan las estrategias indicadas por cursos y en el total

Estrategias	1ºPreesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Separar desde	0	25	50	8,33	20,83
Separar desde emparej	8,33	0	0	0	2,08
Emparejar	8,33	16,66	8,33	0	8,33
Añadir a	0	0	0	8,33	2,08
Percepción inmediata	33,33	8,33	8,33	0	12,50
Conteo oculto	0	0	8,33	0	2,08
Contar hacia abajo desde	0	0	8,33	25	8,33
Contar hacia arriba	0	0	0	16,66	4,17
Dato memorizado	0	0	0	8,33	2,08
Dato derivado	0	0	0	33,33	8,33
?		1			

Representación gráfica de las estrategias empleadas en el problema Comparación 3

Gráfico 5.2.61 : Muestra total   Gráfico 5.2.62 : Por cursos

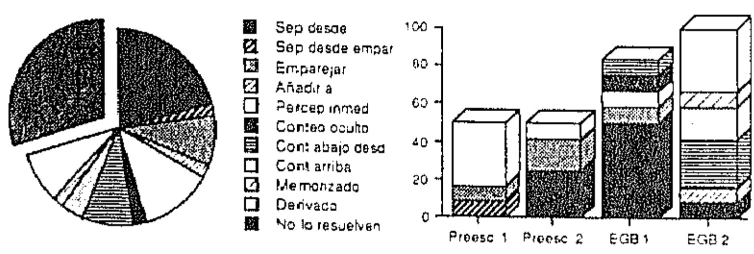


Tabla 5.2.33 : Frecuencias y porcentajes de niños que utilizan las estrategias indicadas en el problema Comparación 3, según los niveles de rendimiento dentro de cada curso.

Curso	Estrategias	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel Bajo
	Separar desde emparej	1 (25%)	0	0
1ºPreesc	Emparejar	1 (25%)	0	0
	Percepción inmediata	1 (25%)	1 (25%)	2 (50%)
	Separar desde	2 (50%)	1 (25%)	0
	Emparejar	1 (25%)	1 (25%)	0
2ºPreesc	Percepción inmediata	1 (25%)	0	0
	?		1 (25%)	
	Separar desde	2 (50%)	3 + 1 (100%)	0
	Emparejar	0	0	1 (25%)
1º EGB	Percepción inmediata	0	0	1 (25%)
	Conteo oculto	1 (25%)	0	0
	Contar hacia abajo desde	1 (25%)	0	0
	Separar desde	0	0	1 (25%)
	Añadir a	0	1 (25%)	0
	Contar hacia abajo desde	1 (25%)	2 (50%)	0
2º EGB	Contar hacia arriba	0	0	2 (50%)
	Dato memorizado	0	1 (25%)	0
	Dato derivado	3 (75%)	0	1 (25%)

Representación gráfica de las estrategias utilizadas en el problema Comparación 3, según los niveles de rendimiento dentro de cada curso :

Gráfico 5.2.63 : 1º de Preescolar

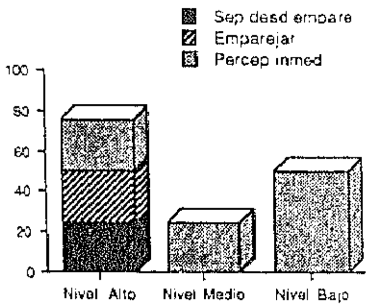


Gráfico 5.2.64 : 2º de Preescolar

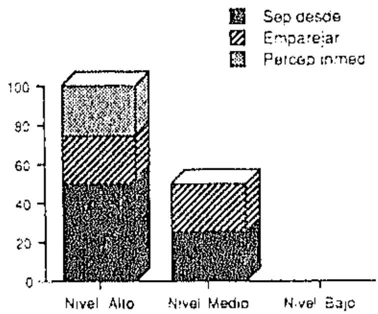


Gráfico 5.2.65 : 1º de EGB

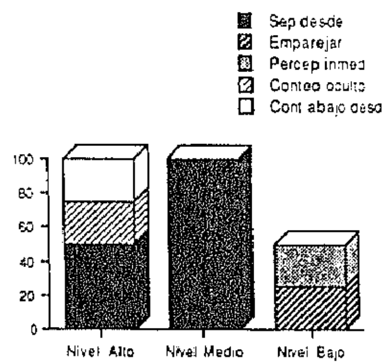
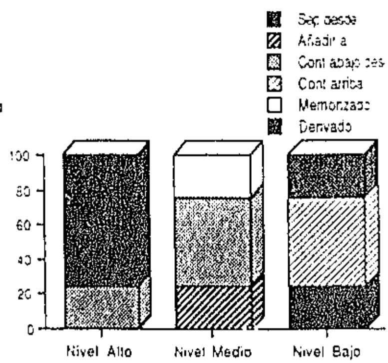


Gráfico 5.2.66 : 2º de EGB



PROBLEMA IGUALACION 1 (Igualar-Añadiendo. Cambio desconocido)

Tabla 5.2.34 : Número de niños que utilizan las distintas estrategias, por cursos y en el total.

Estrategias	1º Preesc	2º Preesc	1º EGB	2º EGB	Total
Percepción inmediata	3 + 1	1	0	0	5
Emparejar	1	5	2	0	8
Añadir emparejando	2	0	1	0	3
Separar desde emparejando	0	0	1	0	1
Añadir a	0	2	1	0	3
Conteo oculto	1	0	0	0	1
Contar hacia arriba	0	3	4	3	10
Dato memorizado	0	1	1 + 1	9	12
?			1		

Tabla 5.2.35 : Porcentaje de niños por curso y en el total que utilizan las distintas estrategias

Estrategias	1º Preesc	2º Preesc	1º EGB	2º EGB	Total
Percepción inmediata	33,33	8,33	0	0	10,42
Emparejar	8,33	41,66	16,66	0	16,67
Añadir emparejando	16,66	0	8,33	0	6,25
Separar desde emparejando	0	0	8,33	0	2,08
Añadir a	0	16,66	8,33	0	6,25
Conteo oculto	8,33	0	0	0	2,08
Contar hacia arriba	0	25	33,33	25	20,83
Dato memorizado	0	8,33	16,66	75	25,00
?			1		

Representación gráfica de las estrategias utilizadas en Igualación 1

Gráfico 5.2.67 : Muestra total

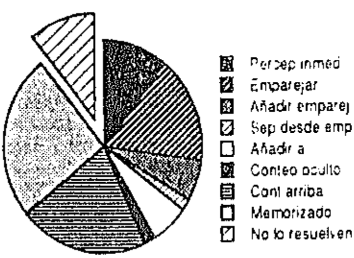


Gráfico 5.2.68 : Por cursos

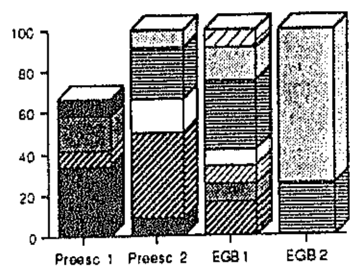


Tabla 5.2.36 : Frecuencias y porcentajes de los niños que utilizan las estrategias indicadas en la solución del problema Igualación 3 según los niveles de rendimiento dentro de cada curso.

Curso	Estrategias	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel Bajo
	Percepción inmediata	2 (50%)	1 (25%)	1 (25%)
	Emparejar	0	1 (25%)	0
1º Preesc	Añadir emparejando	1 (25%)	1 (25%)	0
	Conteo oculto	1 (25%)	0	0
	Percepción inmediata	0	1 (25%)	0
	Emparejar	2 (50%)	0	3 (75%)
2º Preesc	Añadir a	1 (25%)	1 (25%)	0
	Contar hacia arriba	1 (25%)	2 (50%)	0
	Dato memorizado	0	0	1 (25%)
	Emparejar	1 (25%)	0	1 (25%)
	Añadir emparejando	0	0	1 (25%)
	Separar desde emparejando	0	0	1 (25%)
1º EGB	Añadir a	0	1 (25%)	0
	Contar hacia arriba	3 (75%)	0	1 (25%)
	Memorizado	0	1 + 1 (50%)	0
	?		1 (25%)	
	Contar hacia arriba	0	0	3 (75%)
2º EGB	Dato memorizado	4 (100%)	4 (100%)	1 (25%)

Representación gráfica de las estrategias seguidas en la solución del problema Igualación 1, según niveles de rendimiento dentro de cada curso :

Gráfico 5.2.69 : 1º de Preescolar

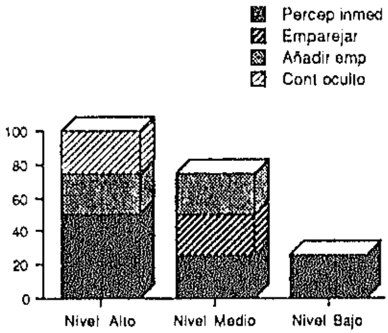


Gráfico 5.2.70 : 2º de Preescolar

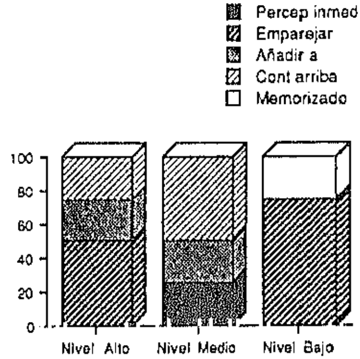


Gráfico 5.2.71 : 1º de EGB

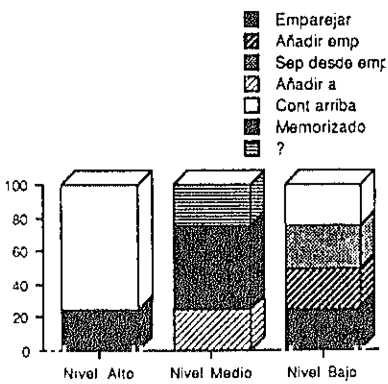
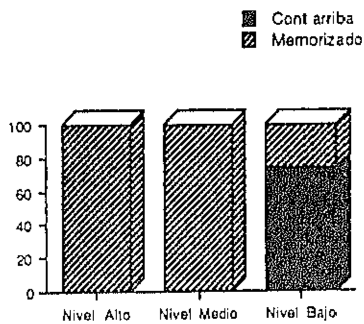


Gráfico 5.2.72 : 2º de EGB



PROBLEMA IGUALACION 2 (Igualar -Quitando. Cambio desconocido)

Tabla 5.2.37 : Número de niños por curso y en el total de la muestra que usan las estrategias indicadas.

Estrategias	1ºPreesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Emparejar	2	3	4	0	9
Separar desde emparej	2	5 + 1	1	0	9
Separar hasta emparej	2 + 1	0	0	0	3
Separar desde	1	1	3	1	6
Separar hasta	0	1	1	1	3
Añadir a	0	0	1	0	1
Contar hacia arriba	0	1	0	2	3
Contar hacia abajo desde	0	0	0	1	1
Contar hacia abajo hasta	0	0	1	2	3
Dato memorizado	0	0	0	1	1
Dato derivado	0	0	1	4	5

Tabla 5.2.38 : Porcentaje de niños que utilizaron las distintas estrategias, por cursos y en el total

Estrategias	1ºPreesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Emparejar	16,66	25	33,33	0	18,75
Separar desde emparej	16,66	50	8,33	0	18,75
Separar hasta emparej	25	0	0	0	6,25
Separar desde	8,33	8,33	25	8,33	12,50
Separar hasta	0	8,33	8,33	8,33	6,25
Añadir a	0	0	8,33	0	2,08
Contar hacia arriba	0	8,33	0	16,66	6,25
Contar hacia abajo desde	0	0	0	8,33	2,08
Contar hacia abajo hasta	0	0	8,33	16,66	6,25
Dato memorizado	0	0	0	8,33	2,08
Dato derivado	0	0	8,33	33,33	10,42

Representación gráfica de las estrategias utilizadas en Igualación 2 :

Gráfico 5.2.73 : Muestra total **Gráfico 5.2.74** : Por cursos

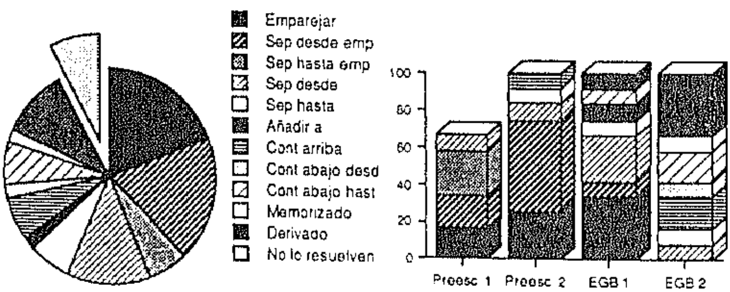


Tabla 5.2.39 : Frecuencias y porcentajes de los niños que utilizan las estrategias indicadas en el problema Igualación 2, según los niveles de rendimiento dentro de cada curso.

Curso	Estrategias	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel Bajo
	Emparejar	0	2 (50%)	0
	Separar desde emparejando	1 (25%)	1 (25%)	0
1º Preesc	Separar hasta emparejando	2 (50%)	1 (25%)	0
	Separar desde	1 (25%)	0	0
	Emparejar	2 (50%)	0	1 (25%)
	Separar desde emparejando	2 (50%)	2 (50%)	1 + 1 (50%)
2º Preesc	Separar desde	0	0	1 (25%)
	Separar hasta	0	1 (25%)	0
	Contar hacia arriba	0	1 (25%)	0
	Emparejar	1 (25%)	1 (25%)	2 (50%)
	Separar desde emparejando	0	1 (25%)	0
	Separar desde	1 (25%)	1 (25%)	1 (25%)
1º EGB	Separar hasta	0	0	1 (25%)
	Añadir a	0	1 (25%)	0
	Contar hacia abajo hasta	1 (25%)	0	0
	Dato derivado	1 (25%)	0	0
	Separar desde	0	0	1 (25%)
	Separar hasta	0	1 (25%)	0
	Contar hacia abajo desde	1 (25%)	0	0
2º EGB	Contar hacia abajo hasta	0	1 (25%)	1 (25%)
	Contar hacia arriba	0	1 (25%)	1 (25%)
	Dato memorizado	0	1 (25%)	0
	Dato derivado	3 (75%)	0	1 (25%)

Representación gráfica de las estrategias utilizadas en el problema Igualación 2, según los niveles de rendimiento dentro de cada curso :

Gráfico 5.2.75 : 1º de Preescolar

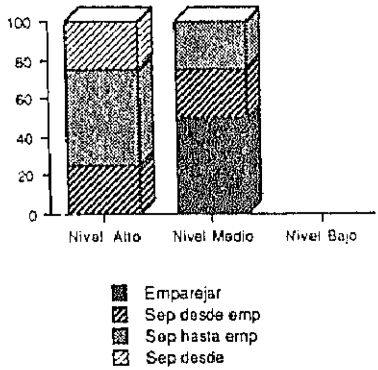


Gráfico 5.2.76 : 2º de Preescolar

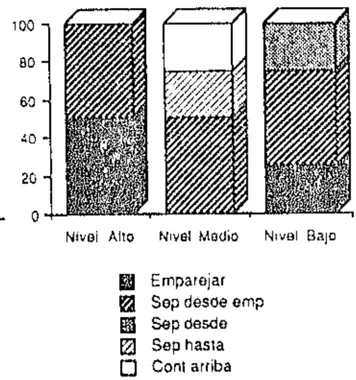


Gráfico 5.2.77 : 1º de EGB

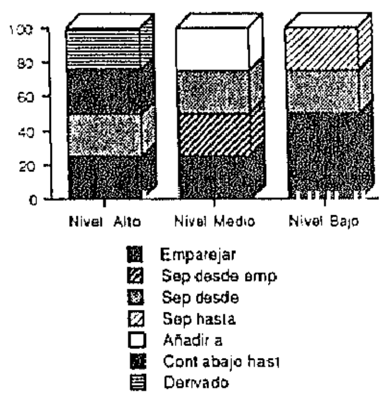
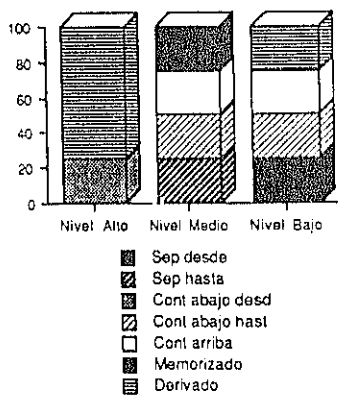


Gráfico 5.2.78 :2º de EGB



PROBLEMA IGUALACION 3 (Juntar-Desconocido término comparación).

Tabla 5.2.40 : Número de niños por curso y en el total de la muestra que usan las siguientes estrategias

Estrategias	1ºPreesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Contar todo con modelos	4 + 3	6 + 4	7	1	25
Contar todo sin modelos	1	0	0	0	1
Contar desde el 1ºsumando	0	0	2	4	6
Dato memorizado	0	1	0	2	3
Dato derivado	0	0	2	5	7

Tabla 5.2.41 : Porcentaje de niños por curso y en el total de la muestra que utilizan las distintas estrategias.

Estrategias	1ºPreesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Contar todo con modelos	58,33	83,33	58,33	8,33	52,08
Contar todo sin modelos	8,33	0	0	0	2,08
Contar desde 1ºsumando	0	0	16,66	33,33	12,50
Dato memorizado	0	8,33	0	16,66	6,25
Dato derivado	0	0	16,66	41,66	14,58

Representación gráfica de las estrategias utilizadas en Igualación 3 :

Gráfico 5.2.79 : Muestra total

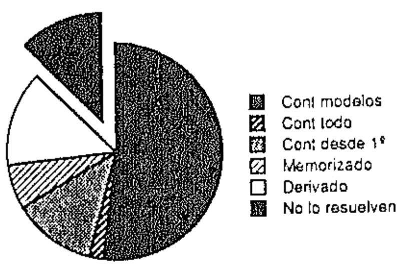


Gráfico 5.2.80 : Por cursos

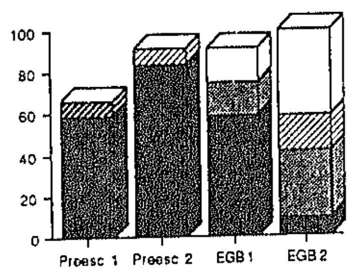


Tabla 5.2.42 : Frecuencias y porcentajes de los niños que utilizan las estrategias mencionadas para la solución del problema Igualación 3, según los niveles de rendimiento dentro de cada curso.

Curso	Estrategias	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel Bajo
1º Preesc	Contar todo con modelos	3 (75%)	1 + 2 (75%)	1 (25%)
	Contar todo sin modelos	0	1 (25%)	0
2º Preesc	Contar todo con modelos	3 (75%)	2 + 2 (100%)	1 + 2 (75%)
	Dato memorizado	1 (25%)	0	0
1º EGB	Contar todo con modelos	2 (50%)	2 (50%)	3 (75%)
	Contar desde el 1ºsumando	1 (25%)	1 (25%)	0
	Dato derivado	1 (25%)	1 (25%)	0
2º EGB	Contar todo con modelos	0	1 (25%)	0
	Contar desde el 1º sumando	0	1 (25%)	3 (75%)
	Dato memorizado	0	2 (50%)	0
	Dato derivado	4 (100%)	0	1 (25%)

Representación gráfica de las estrategias utilizadas según niveles de rendimiento :

Gráfico 5.2.81 : 1º de Preescolar

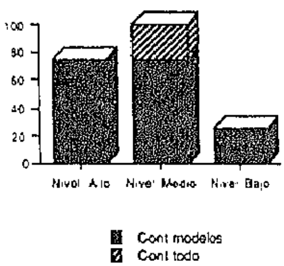


Gráfico 5.2.82 : 2º de Preescolar

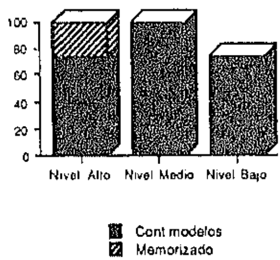


Gráfico 5.2. 83 : 1º de EGB

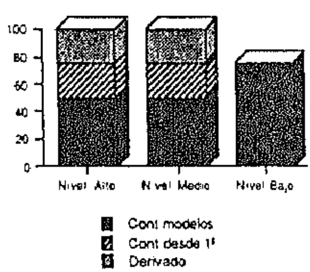
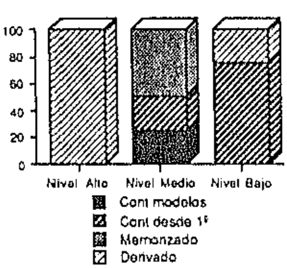


Gráfico 5.2.84 : 2º de EGB



PROBLEMA IGUALACION 4 (Separar-Desconocido térm..comparación).

Tabla 5.2.43 : Frecuencia en la utilización de las distintas estrategias por cursos y en el total .

Estrategias	1ºPreesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Contar todo con modelos	2 + 3	1 + 3	1 + 2	1	13
Tanteo	0	1	0	1 + 1	3
Contar desde el mayor	0	0	6	3	9
Dato memorizado	0	0	0	4	4
Dato derivado	0	0	0	2	2

Tabla 5.2.44 : Porcentaje de niños por curso y en el conjunto de la muestra que usan tales estrategias

Estrategias	1ºPreesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Contar todo modelos	41,66	33,33	25	8,33	27,08
Tanteo	0	8,33	0	16,66	6,25
Contar desde el mayor	0	0	50	25	18,75
Dato memorizado	0	0	0	33,33	8,33
Dato derivado	0	0	0	16,66	4,17

Representación gráfica de las estrategias empleadas en el problema Igualación 4 :

Gráfico 5.2.85 : Muestra total

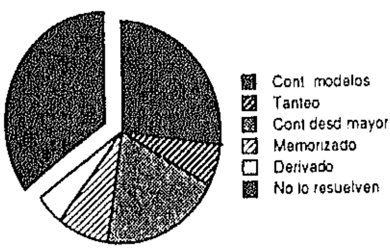


Gráfico 5.2.86 : Por cursos

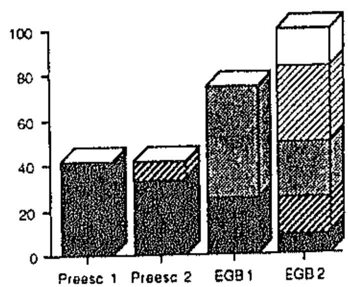


Tabla 5.2.45 : Frecuencia y porcentajes de los niños que utilizan las estrategias indicadas en el problema Igualación 4, según niveles de rendimiento dentro de cada curso

Curso	Estrategias	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel Bajo
1º Preesc	Contar todo con modelos	2 (50%)	1 (25%)	2 (50%)
2º Preesc	Contar todo con modelos	1 + 2 (75%)	0	1 (25%)
	Tanteo 0	0	1 (25%)	
1º EGB	Contar todo con modelos	0	1 + 1 (50%)	1 (25%)
	Contar desde el mayor	4 (100%)	1 (25%)	1 (25%)
2º EGB	Contar todo con modelos	0	0	1 (25%)
	Tanteo 0	1 (25%)	1 (25%)	
	Contar desde el mayor	1 (25%)	1 (25%)	1 (25%)
	Dato memorizado	2 (50%)	2 (50%)	0
	Dato derivado	1 (25%)	0	1 (25%)

Representación gráfica de las estrategias utilizadas en el problema Igualación 4 según niveles de rendimiento dentro de cada curso :

Gráfico 5.2.87 : 1º de Preescolar

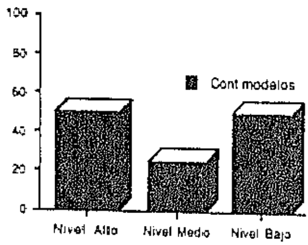


Gráfico 5.2.88 : 2º de Preescolar

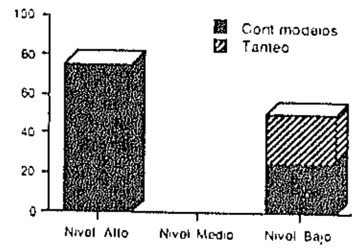


Gráfico 5.2.89 : 1º de EGB

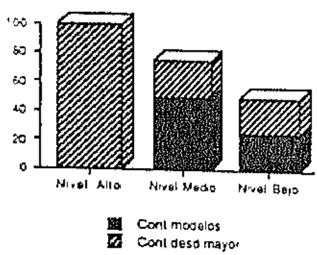
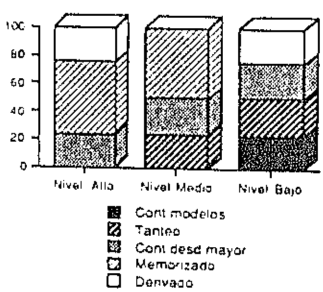


Gráfico 5.2.90 : 2º de EGB



PROBLEMA IGUALACION 5 (Igualar-Añadiendo. Referente desconocido)

Tabla 5.2.46 : Número de niños que utilizan las distintas estrategias según los cursos y en total

Estrategias	1ºPreesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Emparejar	1	1 + 1	2	0	5
Separar desde	2	4	7	0	13
Añadir a	0	0	1	1	2
Percepción inmediata	1	1	0	0	2
Tanteo	0	1	1	4	6
Conteo oculto	1	0	0	0	1
Contar hacia arriba	1	0	0	1	2
Contar hacia abajo desde	0	1	0	1	2
Dato memorizado	0	0	1	1	2
Dato derivado	0	0	0	4	4

Tabla 5.2.47 : Porcentaje de niños por curso y en el total que usan las estrategias mencionadas.

Estrategias	1ºPreesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Emparejar	8,33	16,66	16,66	0	10,42
Separar desde	16,66	33,33	58,33	0	27,08
Añadir a	0	0	8,33	8,33	4,17
Percepción inmediata	8,33	8,33	0	0	4,17
Tanteo	0	8,33	8,33	33,33	12,50
Conteo oculto	8,33	0	0	0	2,08
Contar hacia arriba	8,33	0	0	8,33	4,17
Contar hacia abajo desde	0	8,33	0	8,33	4,17
Dato memorizado	0	0	8,33	8,33	4,17
Dato derivado	0	0	0	33,33	8,33

Representación gráfica de las estrategias utilizadas en Igualación 5 :

Gráfico 5.2.91 : Muestra total **Gráfico 5.2.92 : Por cursos**

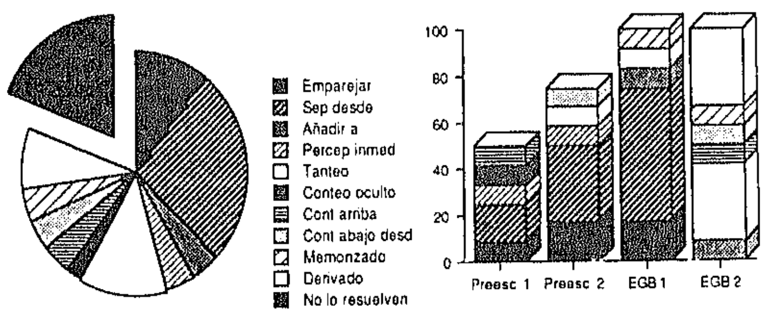


Tabla 5.2.48 : Frecuencia y porcentaje de los niños que utilizan las estrategias indicadas en el problema Igualación 5, según niveles de rendimiento dentro de cada curso.

Curso	Estrategias	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel Bajo
	Separar desde	1 (25%)	1 (25%)	0
	Emparejar	0	1 (25%)	0
1º Preesc	Percepción inmediata	1 (25%)	0	0
	Conteo oculto	1 (25%)	0	0
	Contar hacia arriba	0	1 (25%)	0
	Separar desde	2 (50%)	2 (50%)	0
	Emparejar	1 (25%)	0	1 (25%)
2º Preesc	Tanteo 0	0	1 (25%)	
	Percepción inmediata	0	0	1 (25%)
	Contar hacia abajo desde1	(25%)	0	0
	Separar desde	3 (75%)	3 (75%)	1 (25%)
	Emparejar	0	0	2 (50%)
1º EGB	Añadir a	0	1 (25%)	0
	Tanteo1 (25%)	0	0	
	Dato memorizado	0	0	1 (25%)
	Añadir a	0	1 (25%)	0
	Tanteo 0	1 (25%)	3 (75%)	
	Contar hacia abajo desde1	(25%)	0	0
2º EGB	Contar hacia arriba	0	1 (25%)	0
	Dato memorizado	0	1 (25%)	0
	Dato derivado	3 (75%)	0	1 (25%)

Representación gráfica de las estrategias utilizadas en el problema Igualación 5 según niveles de rendimiento dentro de cada curso :

Gráfico 5.2.93 : 1º de Preescolar

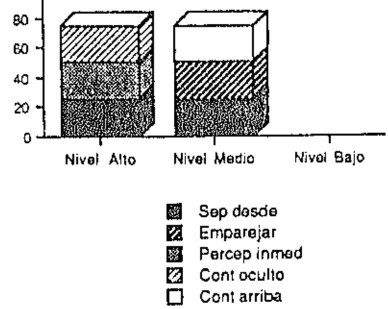


Gráfico 5.2.94 : 2º de Preescolar

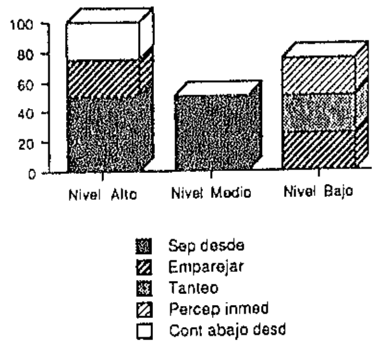


Gráfico 5.2.95 : 1º de EGB

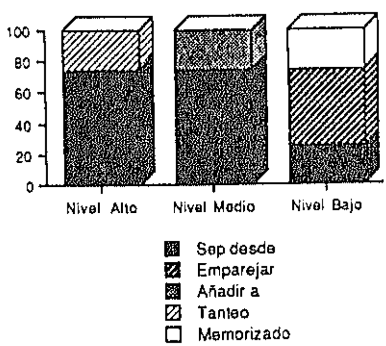
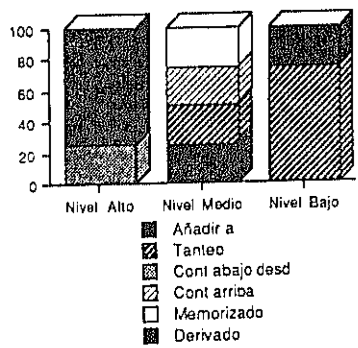


Gráfico 5.2.96 : 2º de EGB



PROBLEMA IGUALACION 6 (Igualar-Quitando. Referente desconocido)

Tabla 5.2.49 : Frecuencia en la utilización de las distintas estrategias por cursos y en el total.

Estrategias	1ºPreesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Separar desde	2 + 6	9 + 1	6 + 2	2	28
Tanteo	0	1	0	0	1
Contar hacia abajo desde	0	0	3 + 1	3	7
Dato memorizado	0	0	0	5 + 1	6
Dato derivado	0	0	0	1	1

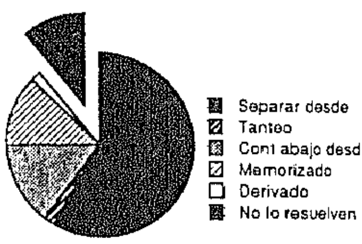
Tabla 5.2.50 : Porcentaje de niños por curso y en el total de la muestra que utilizan tales estrategias

Estrategias	1ºPreesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Separar desde	66,66	83,33	66,66	16,66	58,33
Tanteo	0	8,33	0	0	2,08
Contar hacia abajo desde	0	0	33,33	25	14,58
Dato memorizado	0	0	0	50	12,50
Dato derivado	0	0	0	8,33	2,08

Representación gráfica de las estrategias utilizadas en Igualación 6 :

Gráfico 5.2.97 : Muestra total

Gráfico 5.2.98 : Por cursos



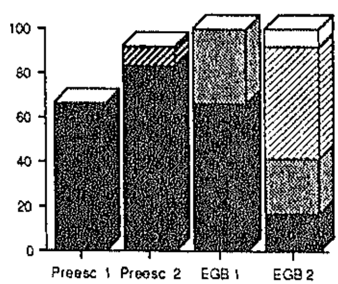


Tabla 5.2.51 : Frecuencia y porcentaje de niños que utilizan las estrategias mencionadas en el problema Igualación 6, según los niveles de rendimiento dentro de cada curso.

Curso	Estrategias	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel Bajo
1º Preesc	Separar desde	2 + 2 (100%)	3 (75%)	1 (25%
2º Preesc	Separar desde	3 + 1 (100%)	4 (100%)	2 (50%)
	Tanteo 0	0	1 (25%)	
1º EGB	Separar desde	1 (25%)	3 (75%)	2 + 2 (100%)
	Contar hacia abajo desde	3 (75%)	1 (25%)	0
2º EGB	Separar desde	0	1 (25%)	1 (25%)
	Contar hacia abajo desde	0	1 (25%)	2 (50%)
	Dato memorizado	3 (75%)	1 + 1 (50%)	1 (25%)
	Dato derivado	1 (25%)	0	0

Representación gráfica de las estrategias utilizadas en el problema Igualación 6, según niveles de rendimiento dentro de cada curso :

Gráfico 5.2.99 : 1º de Preescolar

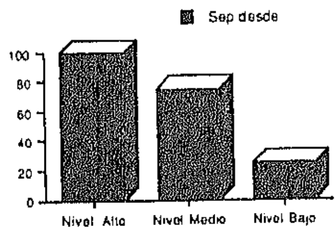


Gráfico 5.2.100 : 2º de Preescolar

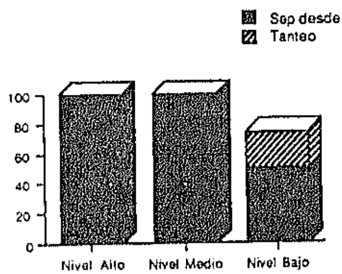


Gráfico 5.2.101 : 1º de EGB

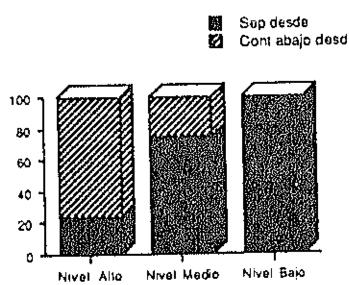
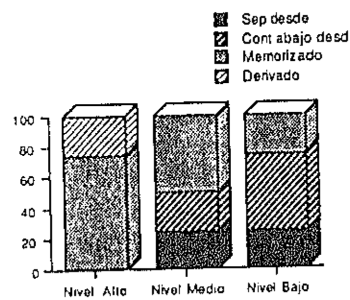


Gráfico 5.2.102 : 2º de EGB



5.3. Errores cometidos en la resolución de problemas

A partir de los videos grabados con las entrevistas a los niños hemos elaborado una clasificación de los errores. El resultado han sido 15 categorías de error, en las que se incluyen prácticamente la totalidad de los fallos y dificultades halladas por los niños en su proceso de solución de los problemas.

Si bien en la descripción de los errores (ver anexo), tenemos en cuenta la diversidad de respuestas incorrectas dadas por un mismo niño en un determinado problema, en el estudio que ahora hacemos consideramos tan sólo el primer error. La razón se encuentra, por una parte, en que no pueden tratarse del mismo modo los distintos fallos cometidos, independientemente del orden en que aparecen y, por otra, en que el tener éste presente, hace excesivamente complejo el proceso de análisis en relación con la información adicional que se consigue.

Ha sido también el deseo de simplificar el que nos ha llevado a considerar únicamente las respuestas infantiles a los problemas en uno sólo de los tamaños del número. En el caso de los preescolares elegimos los problemas con números pequeños, debido a que nuestro propósito es averiguar las dificultades de los niños en la solución de los diversos tipos de problemas, al margen de sus limitaciones en el conteo, y el aumento del tamaño del número conduce a incluir la mayoría de los fallos en la categoría "Dificultad en el manejo de los números".

En el grupo de EGB, sin embargo, encontramos razonable investigar los fallos en los problemas con números grandes, ya que a estas edades, los niños están lo suficientemente familiarizados con la serie numérica hasta el 16, como para que las dificultades en el conteo no constituyan un obstáculo insalvable para su resolución. Además, en estos cursos el hecho de que los niños fracasen en uno de estos problemas por "dificultad en el manejo de los números", nos parece en sí mismo significativo.

Como se ha indicado ya, la reducción del tamaño de los números simplifica en gran medida la tarea y una gran parte de los alumnos que yerran con números grandes, no encuentran dificultad en hallar la solución con números pequeños. Por ello, el hecho de haber tenido en cuenta distinto grupo de problemas (por lo que a la magnitud del número se refiere) en Preescolar y EGB, hace que los resultados cuantitativos no sean comparables, lo que no constituye un obstáculo porque lo que aquí nos interesa es efectuar una valoración cualitativa de los errores.

Por último, la circunstancia de tener en cuenta la primera contestación que el niño da, en lugar de la última, como en el estudio de los porcentajes de respuestas correctas y de las estrategias utilizadas, hace que los resultados observados en uno y otro apartado no sean coincidentes.

En la presentación de los datos seguimos el mismo procedimiento utilizado en el caso de las estrategias: analizamos en cada uno de los problemas los errores cometidos por curso y en el conjunto de la muestra, en primer lugar, para descender luego a estudiar los que aparecen según los niveles de rendimiento dentro de cada curso.

Las tablas se acompañan de sus correspondientes gráficos; para los resultados globales se utiliza uno circular en el que cada zona sombreada indica el porcentaje de niños que comete un determinado tipo de error y el área en blanco el porcentaje de los que resuelven el problema sin tropiezos iniciales; en la representación gráfica de los errores según cursos y niveles de rendimiento, empleamos gráficos de columnas totalizadas que reflejan los porcentajes de niños, de un determinado curso o de un determinado nivel de rendimiento dentro de un curso en concreto, que cometen uno u otro tipo de error.

PROBLEMA CAMBIO 1 (Cambio-Juntar. Resultado desconocido)

Tabla 5.3.1: Frecuencia y porcentaje de errores en cada categoría, según cursos escolares

Tipos de error	1º Preesc	2º Preesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Falta de respuesta	1 (8,33%)	-	-	-	1 (2,08%)

PROBLEMA CAMBIO 2 (Cambio-Separar. Resultado desconocido)

Tabla 5.3.2: Frecuencia y porcentaje de errores en cada categoría, según cursos escolares

Tipos de error	1º Preesc	2º Preesc	1º EGB	2º EGB	Total
Respuesta cualitativa	2 (16,67%)	0	-	-	2 (4,17%)
Falta de respuesta	2 (16,67%)	0	-	-	2 (4,17%)
Confundir operación	0	1 (8,33%)	-	-	1 (2,08%)

Representación gráfica de los errores cometidos en el problema Cambio 2

Gráfico 5.3.1. Muestra total

Gráfico 5.3.2. Por cursos

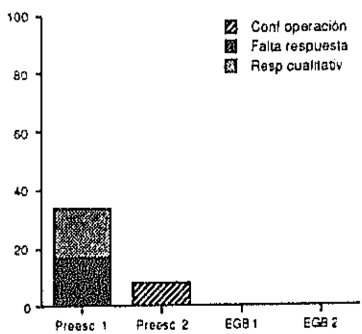


Tabla 5.3.3 : Frecuencias y porcentajes de los distintos tipos de error en el problema **Cambio 2, según niveles de rendimiento dentro de cada curso:**

Curso	Tipos de error	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel bajo
1ªPreesc	Respuesta cualitativa	0	1 (25%)	1 (25%)
	Falta de respuesta	0	0	2 (50%)
2ªPreesc	Confundir operación	0	0	1 (25%)

Representación gráfica de los errores cometidos en el problema Cambio 2, según cursos y niveles de rendimiento

Gráfico 5.3.3 : 1ª de Preescolar

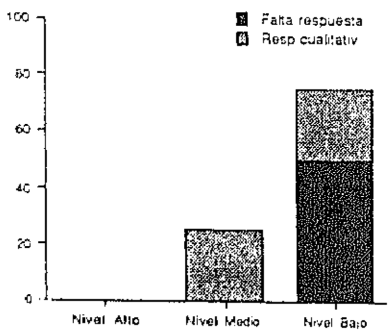
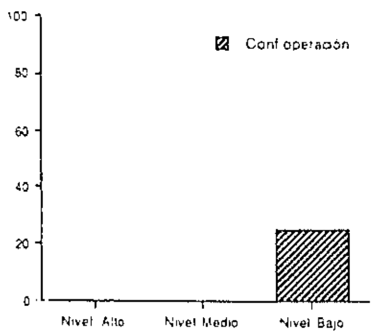


Gráfico 5.3.4 : 2º de Preescolar



PROBLEMA CAMBIO 3 (Cambio-Juntar. Cambio desconocido)

Tabla 5.3.4: Número de errores de cada tipo hallados en los distintos cursos:

Tipos de error	1ºPreesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Dato problema (cant final)	4 (33,33%)	2 (16,67%)	1 (8,33%)	-	7 (14,58%)
Dato problema (inicio)	0	1 (8,33%)	1 (8,33%)	-	2 (4,17%)
Expresar desconocimiento	1 (8,33%)	0	0	-	1 (2,08%)
Respuesta cualitativa	2 (16,67%)	1 (8,33%)	0	-	3 (6,25%)
Falta de respuesta	2 (16,67%)	0	0	-	2 (4,17%)
Responder aproximación	0	2 (16,67%)	0	-	2 (4,17%)
Dificultad manejo números	0	0	1 (8,33%)	-	1 (2,08%)

Representación gráfica de los errores cometidos en el problema Cambio 3

Gráfico 5.3.5 : Muestra total

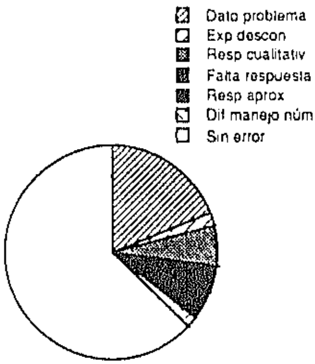


Gráfico 5.3.6 : Por cursos

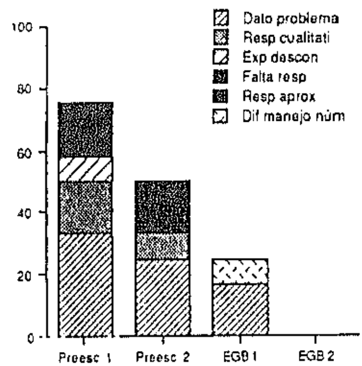


Tabla 5.3.5 : Frecuencias y porcentajes de los distintos tipos de error en el problema **Cambio 3**, según niveles de rendimiento dentro de cada curso:

Curso	Tipos de error	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel bajo
1º Preesc	Dato problema (cant final)	0	2 (50%)	2 (50%)
	Expresar desconocimiento	1 (25%)	0	0
	Respuesta cualitativa	0	1 (25%)	1 (25%)
	Falta de respuesta	0	1 (25%)	1 (25%)
2º Preesc	Dato problema (cant final)	0	1 (25%)	1 (25%)
	Dato problema (cant inicial)	0	0	1 (25%)
	Respuesta cualitativa	0	0	1 (25%)
	Responder por aproximación	1 (25%)	1 (25%)	0
1º EGB	Dato problema (cant final)	0	0	1 (25%)
	Dato problema (cant inicial)	0	0	1 (25%)
	Dificultad manejo números	0	0	1 (25%)

Representación de los errores en Cambio 3, según cursos y rendimiento

Gráfico 5.3.7 : 1º de Preescolar

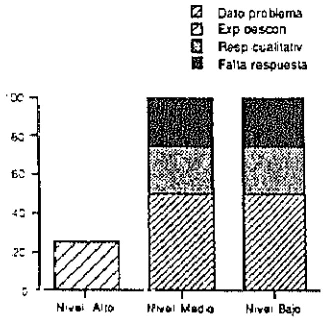


Gráfico 5.3.8 : 2º de Preescolar

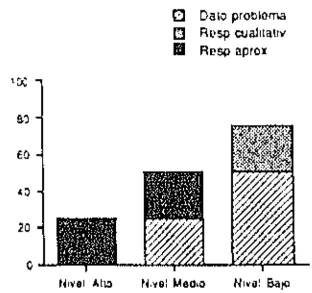
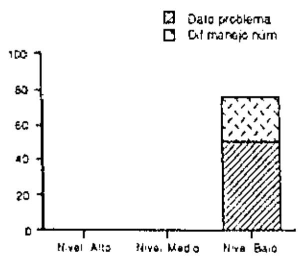


Gráfico 5.3.9 : 1º de EGB



Problema Cambio 4 (Cambio-Separar. Cambio desconocido)

Tabla 5.3.6 : Número de errores de cada tipo hallados en los distintos cursos:

Tipos de error	1ºPreesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Dato problema (cant inicial)	2 (16,67%)	0	0	-	2 (4,17%)
Expresar desconocimiento	1 (8,33%)	0	0	-	1 (2,08%)
Falta de respuesta	2 (16,67%)	0	0	-	2 (4,17%)
Centración en un dato	0	1 (8,33%)	0	-	1 (2,08%)
Conf. operación (acción)	0	0	1 (8,33%)	-	1 (2,08%)

Representación gráfica de los errores cometidos en el problema Cambio 4

Gráfico 5.3.10 : Muestra total

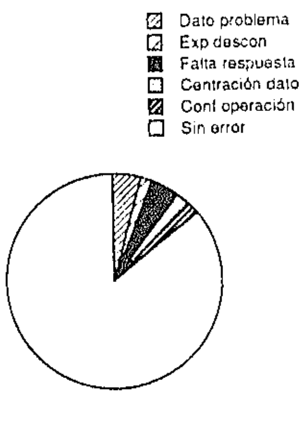


Gráfico 5.3.11: Por cursos

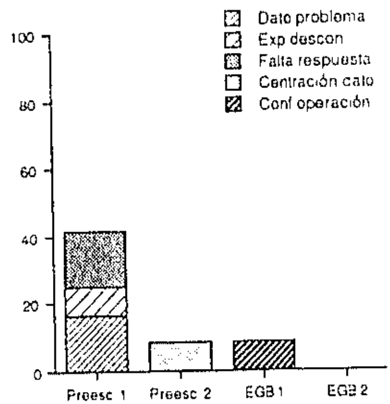


Tabla 5.3.7. Frecuencias y porcentajes de los distintos tipos de error en el problema **Cambio 4**, según niveles de rendimiento dentro de cada curso:

Curso	Tipos de error	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel bajo
1ºPreesc	Dato problema (cant inicial)	1 (25%)	1 (25%)	0
	Expresar desconocimiento	0	0	1 (25%)
	Falta de respuesta	0	0	2 (50%)
2ºPreesc	Centración en un dato	0	0	1 (25%)
1ºEGB	Confundir operación (acción)	0	0	1 (25%)

Representación de los errores en Cambio 4, según cursos y rendimiento

Gráfico 5.3.12. : 1º de Preescolar

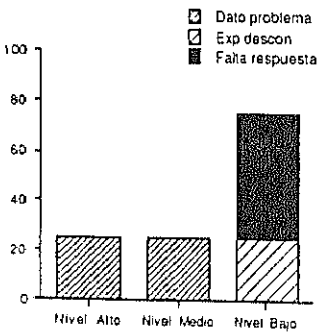


Gráfico 5.3.13. : 2º de Preescolar

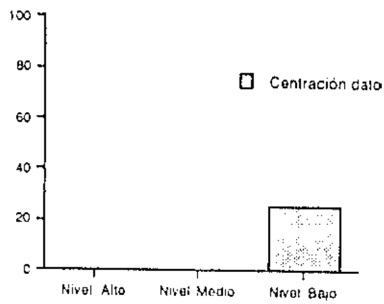
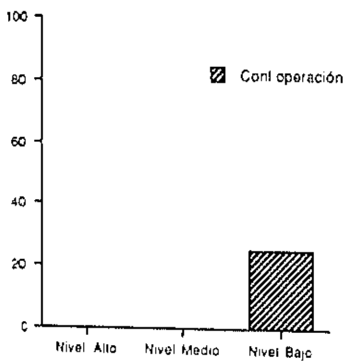


Gráfico 5.3.14.: 1º de EGB

Errores en Cambio 4. 1º de EGB



PROBLEMA CAMBIO 5 (Cambio-Juntar. Comienzo desconocido)

Tabla 5.3.8. : Número de errores de cada tipo hallados en los distintos cursos:

Tipos de error	1º Preesc	2º Preesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Dato problema (cambio)	3 (25%)	9 (75%)	2 (16,67%)	0	14 (29,17%)
Dato problema (cant final)	2 (16,67%)	0	0	0	2 (4,17%)
Respuesta cualitativa	2 (16,67%)	0	1 (8,33%)	0	3 (6,25%)
Falta de respuesta	2 (16,67%)	0	0	0	2 (4,17%)
Expresar desconocimiento	1 (8,33%)	0	2 (16,67%)	0	3 (6,25%)
Expresar cant indeterm	0	1 (8,33%)	0	0	1 (2,08%)
Respuesta ciega	0	1 (8,33%)	0	0	1 (2,08%)
Confundir operación	0	0	1 (8,33%)	2 (16,67%)	3 (6,25%)
Fracaso aritm formal	0	0	1 (8,33%)	0	1 (2,08%)

Representación gráfica de los errores cometidos en el problema Cambio 5

Gráfico 5.3.15.: Muestra total

Gráfico 5.3.16. : Por cursos

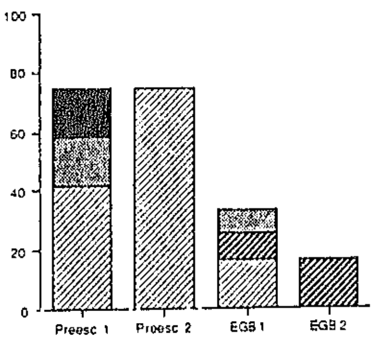


Tabla 5.3.9. : Frecuencias y porcentajes de los distintos tipos de error en el problema **Cambio 5**, según niveles de rendimiento dentro de cada curso:

Curso	Tipos de error	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel bajo
1º Preesc	Dato problema (cant cambio)	1 (25%)	1 (25%)	1 (25%)
	Dato problema (cant final)	0	1 (25%)	1 (25%)
	Respuesta cualitativa	1 (25%)	1 (25%)	0
	Falta de respuesta	0	1 (25%)	1 (25%)
	Expresar desconocimiento	0	0	1 (25%)
2º Preesc	Dato problema (cant cambio)	1 (25%)	4 (100%)	4 (100%)
	Expresar cant indeterminada	1 (25%)	0	0
	Respuesta ciega	1 (25%)	0	0
1º EGB	Dato problema (cant cambio)	0	0	2 (50%)
	Respuesta cualitativa	0	1 (25%)	0
	Expresar desconocimiento	0	1 (25%)	1 (25%)
	Confundir operación (acción)	0	0	1 (25%
	Fracaso operación aritm formal	1 (25%)	0	0
2º EGB	Confundir operación (acción)	0	1 (25%)	1 (25%

Representación gráfica de los errores en Cambio 5. según los niveles de rendimiento dentro de cada curso:

Gráfico 5.3.17. : 1º de Preescolar

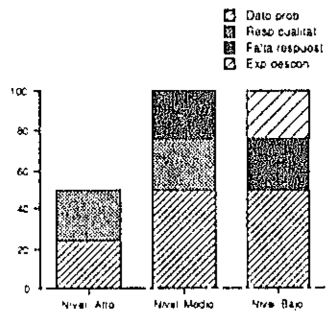


Gráfico 5.3.18. : 2º de Preescolar

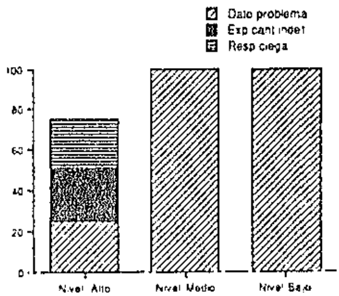


Gráfico 5.3.19 : 1º de EGB

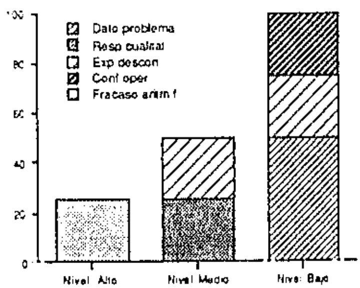
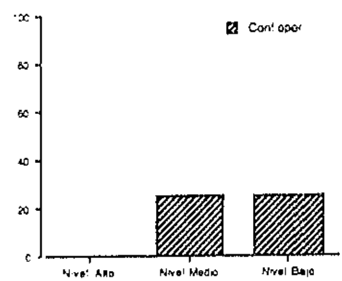


Gráfico 5.3.20 : 2º de EGB



BIBLIOTECA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

PROBLEMA CAMBIO 6 (Cambio-Separar. Comienzo desconocido)

Tabla 5.3.10 : Número de errores de cada tipo hallados en los distintos cursos:

Tipos de error	1ª Preesc	2ª Preesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Dato problema (cambio)	2 (16,67%)	5 (41,67%)	3 (25%)	0	10 (20,83%)
Dato problema (final)	0	0	1 (8,33%)	0	1 (2,08%)
Respuesta cualitativa	1 (8,33%)	0	0	0	1 (2,08%)
Expresar desconocimiento	1 (8,33%)	0	0	0	1 (2,08%)
Centración en un dato	0	0	1 (8,33%)	0	1 (2,08%)
Partir montón de fichas	0	0	0	1 (8,33%)	1 (2,08%)
Confusión operación	0	0	0	3 (25%)	3 (6,25%)
Falta de respuesta	1 (8,33%)	0	0	0	1 (2,08%)

Representación gráfica de los errores cometidos en el problema Cambio 6

Gráfico 5.3.21: Muestra total

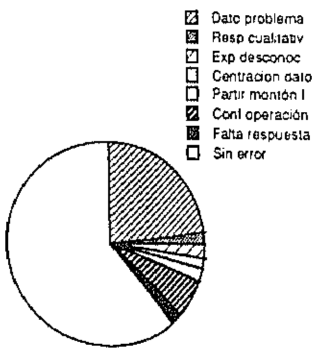
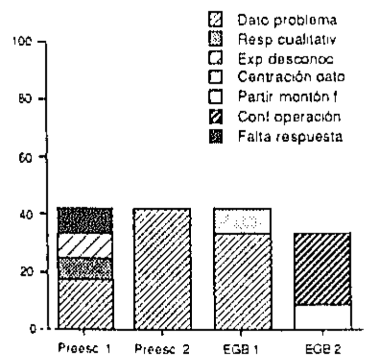


Gráfico 5.3.22: Por cursos



5.3.11 : Frecuencias y porcentajes de los distintos errores en el problema Cambio 6, según niveles de rendimiento dentro de cada curso:

Curso	Tipos de error	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel bajo
1ºPreesc	Dato problema (cant cambio)	0	1 (25%)	1 (25%)
	Respuesta cualitativa	0	1 (25%)	0
	Expresar desconocimiento	0	0	1 (25%)
	Falta de respuesta	0	0	1 (25%)
2ºPreesc	Dato problema (cant cambio)	0	2 (50%)	3 (75%)
1ºEGB	Dato problema (cant cambio)	0	1 (25%)	2 (50%)
	Dato problema (cant final)	1 (25%)	0	0
	Centración en un dato	0	1 (25%)	0
2ºEGB	Partirde un montón de fichas	0	0	1 (25%)
	Confundir operación (acción)	1 (25%)	2 (50%)	0

Representación gráfica de los errores según curso y nivel de rendimiento

Gráfico 5.3.23: 1º de Preescolar

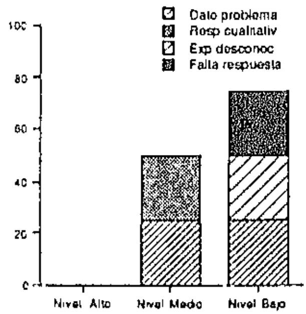


Gráfico 5.3.24: 2º de Preescolar

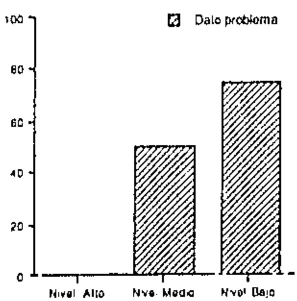


Gráfico 5.3.25: 1º de EGB

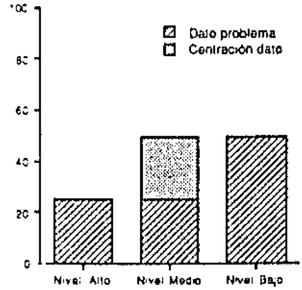
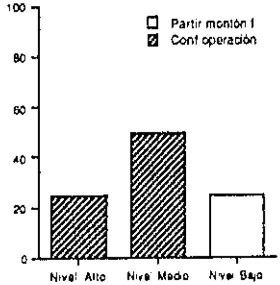


Gráfico 5.3.26: 2º de EGB



PROBLEMA COMBINACION 1 (Desconocido el total)

Tabla 5.3.12 : Número de errores de cada tipo hallados en los distintos cursos:

Tipos de error	1º Preesc	2º Preesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Expresar desconocimiento	1 (8,33%)	0	0	-	1 (2,08%)
Respuesta cualitativa	2 (16,67%)	0	0	-	2 (4,17%)
Responder por aproximación	1 (8,33%)	0	0	-	1 (2,08%)
Dificultad manejo números	0	0	1 (8,33%)	-	1 (2,08%)
Falta de respuesta	1 (8,33%)	0	0	-	1 (2,08%)

Representación gráfica de los errores en el problema Combinación 1

Gráfico 5.3.27: Muestra total

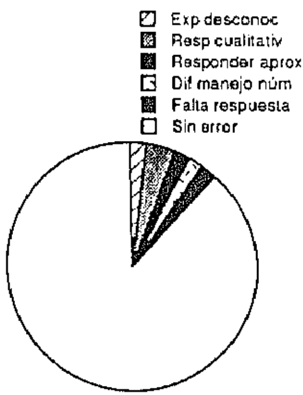


Gráfico 5.3.28 : Por cursos

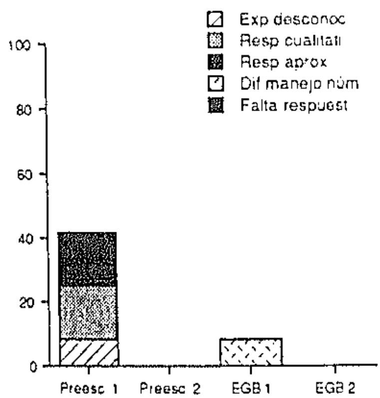


Tabla 5.3.13 : Frecuencias y porcentajes de los distintos tipos de error en el problema Combinación 1, según niveles de rendimiento dentro de cada curso:

Curso	Tipos de error	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel bajo
1ºPreesc	Expresar desconocimiento	0	0	1 (25%)
	Respuesta cualitativa	0	1 (25%)	1 (25%)
	Responder por aproximación	0	0	1 (25%)
	Falta de respuesta	0	0	1 (25%)
1ºEGB	Dificultad manejo números	0	0	1 (25%)

Representación gráfica de los errores según cursos y niveles de rendimiento

Gráfico 5.3.29 : 1º de Preescolar

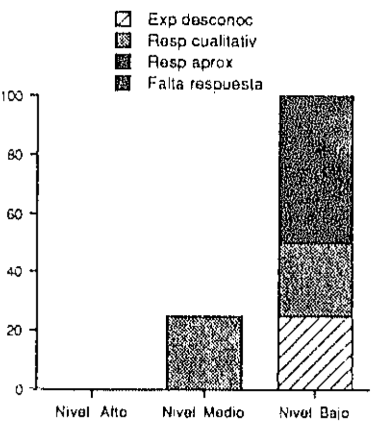
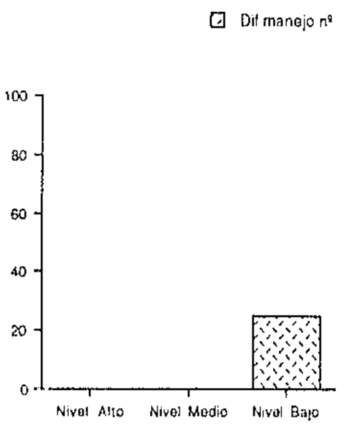


Gráfico 5.3.30 : 1º de EGB



PROBLEMA COMBINACION 2 (Desconocida una parte)

Tabla 5.3.14 : Número de errores de cada tipo hallados en los distintos cursos:

Tipos de error	1º Preesc	2º Preesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Dato problema (total)	5 (41,67%)	0	0	1 (8,33%)	6 (12,5%)
Dato problema (parte)	0	1 (8,33%)	0	0	1 (2,08%)
Falta de respuesta	3 (25%)	0	0	0	3 (6,25%)
Confundir operación	1 (8,33%)	1 (8,33%)	3 (25%)	2 (16,67%)	7 (14,58%)
Respuesta cualitativa	0	1 (8,33%)	0	0	1 (2,08%)
Respuesta ciega	0	0	1 (8,33%)	0	1 (2,08%)
Centración en el color	0	0	1 (8,33%)	1 (8,33%)	2 (4,17%)
Dificultad manejo núm	0	0	1 (8,33%)	0	1 (2,08%)

Representación gráfica de los errores cometidos en Combinación 2

Gráfico 5.3.31 : Muestra total

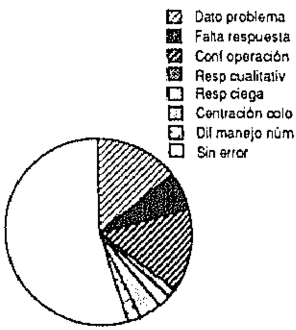


Gráfico 5.3.32 : Por cursos

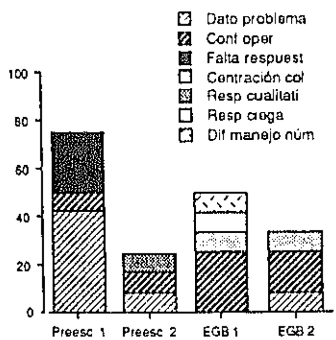


Tabla 5.3.15 : Frecuencias y porcentajes de los distintos tipos de error en el problema Combinación 2, según niveles de rendimiento dentro de cada curso:

Curso	Tipos de error	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel bajo
1ºPreesc	Dato problema (total)	1 (25%)	3 (75%)	1 (25%)
	Falta de respuesta	0	1 (25%)	2 (50%)
	Confundir operación (acción)	0	0	1 (25%)
2ºPreesc	Confundir operación (acción)	0	0	1 (25%)
	Respuesta cualitativa	0	0	1 (25%)
	Dato problema (parte)	0	0	1 (25%)
1ºEGB	Confundir operación (acción)	1 (25%)	0	2 (50%)
	Respuesta ciega	0	0	1 (25%)
	Centración en el color	0	1 (25%)	0
	Dificultad manejo números	0	0	1 (25%)
2ºEGB	Confundir operación (acción)	0	2 (50%)	0
	Dato problema (total)	0	0	1 (25%)
	Centración en el color	0	0	1 (25%)

Representación de los errores en Combinación 2 según cursos y rendimiento

Gráfico 5.3.33 : 1º de Preescolar

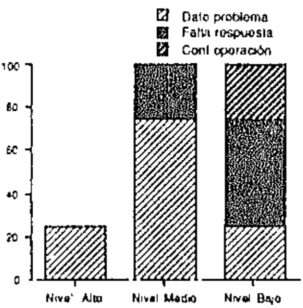


Gráfico 5.3.34 : 2º de Preescolar

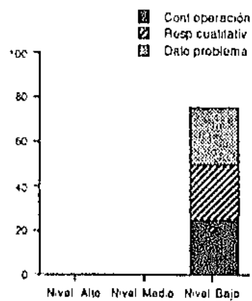


Gráfico 5.3.35 : 1º de EGB

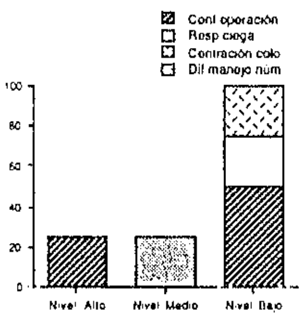
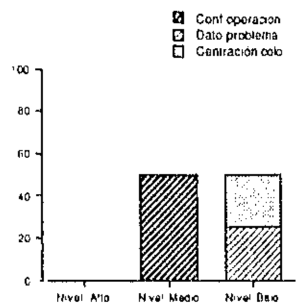


Gráfico 5.3.36 : 2º de EGB



PROBLEMA COMPARACION 1 (Desconocida la diferencia)

Tabla 5.3.16 : Número de errores de cada tipo hallados en los distintos cursos:

Tipos de error	1º Preesc	2º Preesc	1º EGB	2º EGB	Total
Dato problema (comp)	3 (25%)	4 (33,33%)	10 (83,33%)	2 (16,67%)	19 (39,58%)
Confundir operación	1 (8,33%)	1 (8,33%)	2 (16,67%)	1 (8,33%)	5 (10,42%)
Respuesta cualitativa	5 (41,67%)	1 (8,33%)	0	0	6 (12,5%)
Falta de respuesta	2 (16,67%)	1 (8,33%)	0	0	3 (6,25%)
Expresar desconoc	0	1 (8,33%)	0	0	1 (2,08%)

Representación gráfica de los errores cometidos en Comparación 1

Gráfico 5.3.37 : Muestra total

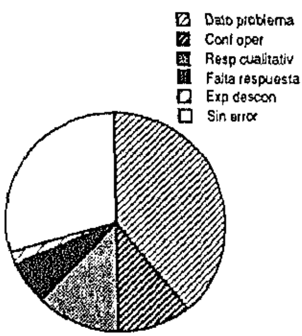


Gráfico 5.3.38 : Por cursos

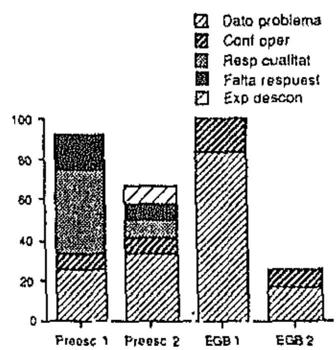


Tabla 5.3.17 : Frecuencias y porcentajes de los distintos tipos de error en el problema **Comparación** 1, según niveles de rendimiento dentro de cada curso:

Curso	Tipos de error	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel bajo
1ºPreesc	Dato problema (cant comp)	1 (25%)	1 (25%)	1 (25%)
	Confundir operación (acción)	0	1 (25%)	0
	Respuesta cualitativa	2 (50%)	1 (25%)	2 (50%)
	Falta de respuesta	0	1 (25%)	1 (25%)
2ºPreesc	Dato problema (cant comp)	0	2 (50%)	2 (50%)
	Respuesta cualitativa	0	0	1 (25%)
	Confundir operación (acción)	1 (25%)	0	0
	Expresar desconocimiento	0	1 (25%)	0
	Falta de respuesta	0	0	1 (25%)
1ºEGB	Dato problema (cant comp)	3 (75%)	4 (100%)	3 (75%)
	Confundir operación (acción)	1 (25%)	0	1 (25%)
2ºEGB	Dato problema (cant comp)	0	1 (25%)	1 (25%)
	Confundir operación (acción)	0	0	1 (25%)

Representación de los errores en Comparación 1, según cursos y rendimiento

Gráfico 5.3.39 : 1º de Preescolar

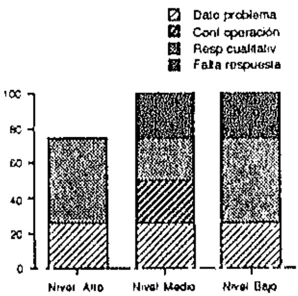


Gráfico 5.3.40 : 2º de Preescolar

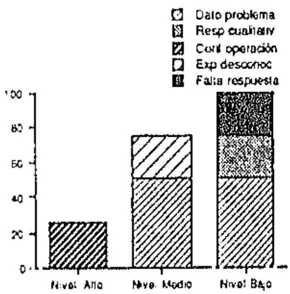


Gráfico 5.3.41 : 1º de EGB

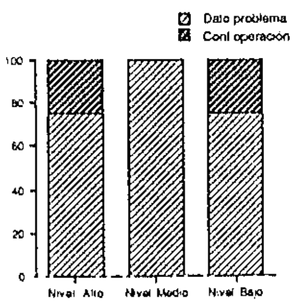
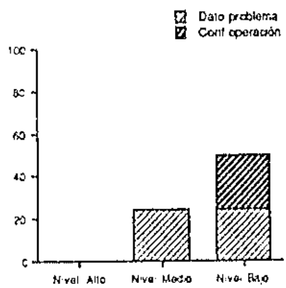


Gráfico 5.3.42 : 2º de EGB



PROBLEMA COMPARACION 2 (Desconocida cantidad de comparación)

Tabla 5.3.18 : Número de errores de cada tipo hallados en los distintos cursos:

Tipos de error	1º Preesc	2º Preesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Dato problema (dif)	7 (58,33%)	8 (66,67%)	10 (83,33%)	2 (16,67%)	27 (56,25%)
Falta de respuesta	3 (25%)	0	1 (8,33%)	0	4 (8,33%)
Respuesta cualitativa	1 (8,33%)	0	0	0	1 (2,08%)
Expresar desconoc	0	1 (8,33%)	0	0	1 (2,08%)
Centración en un dato	0	0	1 (8,33%)	0	1 (2,08%)
Confundir operación	0	0	0	3 (25%)	3 (6,25%)

Representación gráfica de los errores cometidos en Comparación 2

Gráfico 5.3.43 : Muestra total

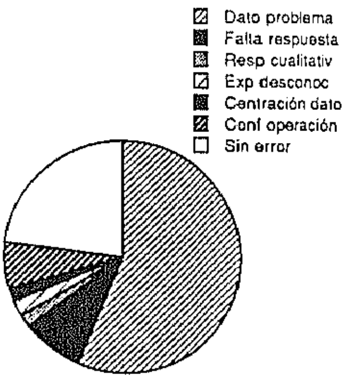


Gráfico 5.3.44 : Por cursos

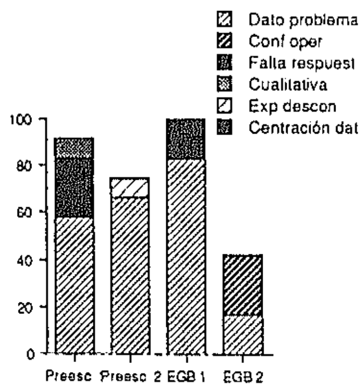


Tabla 5.3.19 : Frecuencias y porcentajes de los distintos tipos de error en el problema Comparación 2, según niveles de rendimiento dentro de cada curso:

Curso	Tipos de error	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel bajo
1ºPreesc	Dato problema (diferencia)	3 (75%)	2 (50%)	2 (50%)
	Falta de respuesta	0	2 (50%)	1 (25%)
	Respuesta cualitativa	0	0	1 (25%)
2ºPreesc	Dato problema (diferencia)	1 (25%)	3 (75%)	4 (100%)
	Expresar desconocimiento	1 (25%)	0	0
1ºEGB	Dato problema (diferencia)	4 (100%)	4 (100%)	2 (50%)
	Falta de respuesta	0	0	1 (25%)
	Centración en un sólo dato	0	0	1 (25%)
2ºEGB	Dato problema (diferencia)	0	1 (25%)	1 (25%)
	Confundir operación (acción)	1 (25%)	1 (25%)	1 (25%)

Representación de los errores en Comparación 2 según curso y rendimiento

Gráfico 5.3.45 : 1º de Preescolar

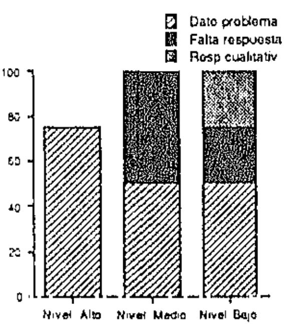


Gráfico 5.3.46 : 2º de EGB

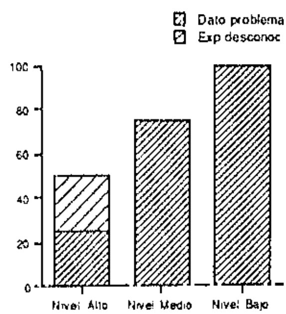


Gráfico 5.3.47 : 1º de EGB

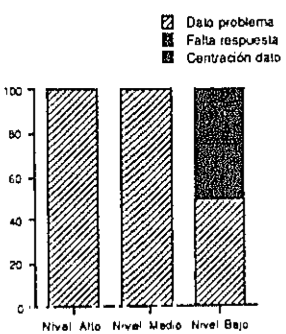
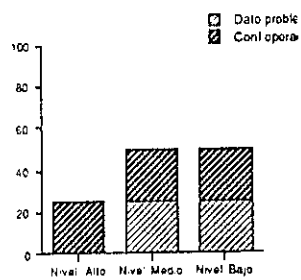


Gráfico 5.3.48 : 2º de EGB



PROBLEMA COMPARACION 3 (Referente desconocido)

Tabla 5.3.20 : Número de errores de cada tipo hallados en los distintos cursos:

Tipos de error	1º Preesc	2º Preesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Dato problema (dif)	3 (25%)	3 (25%)	5 (41,67%)	0	11 (22,92%)
Dato problema (comp)	0	1 (8,33%)	0	0	1 (2,08%)
Confundir operación	2 (16,67%)	3 (25%)	2 (16,67%)	1 (8,33%)	8 (16,67%)
Centración en el color	1 (8,33%)	0	0	0	1 (2,08%)
Expresar desconocimiento	1 (8,33%)	0	2 (16,67%)	0	3 (6,25%)
Falta de respuesta	3 (25%)	0	0	2 (16,67%)	5 (10,42%)
Dificultad manejo números	0	0	1 (8,33%)	0	1 (2,08%)
Olvidar dimen comparat.	0	0	0	1 (8,33%)	1 (2,08%)

Representación gráfica de los errores cometidos en Comparación 3

Gráfico 5.3.49 : Muestra total

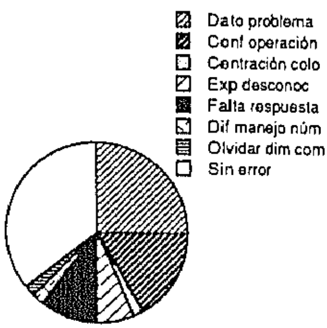


Gráfico 5.3.50 : Por cursos

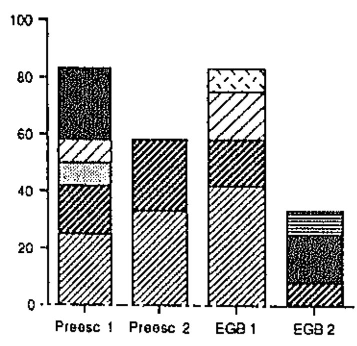


Tabla 5.3.21 : Frecuencias y porcentajes de los distintos tipos de error en el problema **Comparación** 3, según niveles de rendimiento dentro de cada curso:

Curso	Tipos de error	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel bajo
1ºPreesc	Dato problema (diferencia)	2 (50%)	1 (25%)	0
	Confundir operación (acción)	0	1 (25%)	1 (25%)
	Centración en el color	1 (25%)	0	0
	Falta de respuesta	0	0	3 (75%)
	Expresar desconocimiento	0	1 (25%)	0
2ºPreesc	Dato problema (diferencia)	1 (25%)	2 (50%)	0
	Dato problema (cant comp)	0	0	1 (25%)
	Confundir operación (acción)	0	0	3 (75%)
1ºEGB	Dato problema (diferencia)	1 (25%)	1 (25%)	3 (75%)
	Confundir operación (acción)	1 (25%)	1 (25%)	0
	Dificultad manejo números	0	0	1 (25%)
	Expresar desconocimiento	1 (25%)	1 (25%)	0
2ºEGB	Confundir operación (acción)	0	1 (25%)	0
	Falta de respuesta	0	0	2 (50%)
	Olvidar dimensión comparat	0	0	1 (25%)

Representación de los errores en Comparación 3 según curso y rendimiento

Gráfico 5.3.51 : 1º de Preescolar

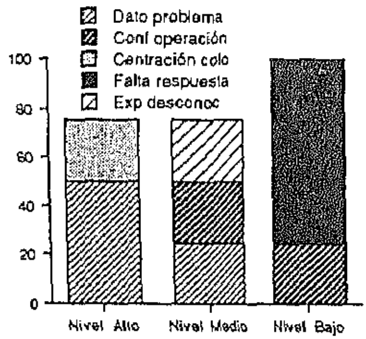


Gráfico 5.3.52 : 2º de Preescolar

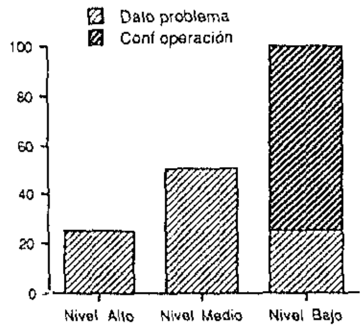


Gráfico 5.3.53 : 1º de EGB

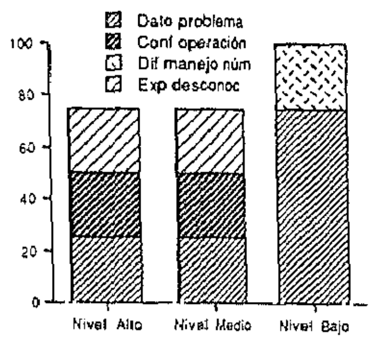
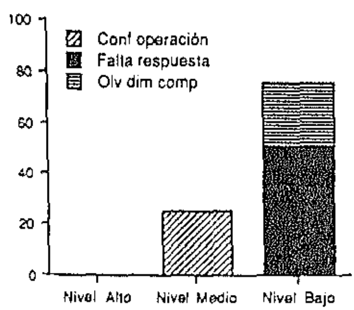


Gráfico 5.3.54 : 2º de EGB



PROBLEMA IGUALACION 1 (Juntar-Cambio desconocido)

Tabla 5.3.22 : Número de errores de cada tipo hallados en los distintos cursos:

Tipos de error	1ª Preesc	2ª Preesc	1ªEGB	2ªEGB	Total
Dato problema (referente)	2 (16,67%)	1 (8,33%)	0	-	3 (6,25%)
Dato problema (cant comp)	0	0	2 (16,67%)	-	2 (4,17%)
Respuesta ciega	2 (16,67%)	0	0	-	2 (4,17%)
Centración en un solo dato	0	1 (8,33%)	0	-	1 (2,08%)
Falta de respuesta	1 (8,33%)	0	0	-	1 (2,08%)
Sin determinar	0	0	2 (16,67%)	-	2 (4,17%)

Representación gráfica de los errores cometidos en Igualación 1

Gráfico 5.3.55 : Muestra total

Gráfico 5.3.56 : Por cursos

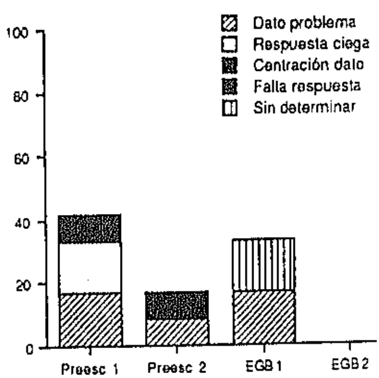


Tabla 5.3.23 : Frecuencias y porcentajes de los distintos tipos de error en el problema **Igualación** 1, según niveles de rendimiento dentro de cada curso:

Curso	Tipos de error	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel bajo
1ªPreesc	Dato problema (referente)	0	1 (25%)	1 (25%)
	Falta de respuesta	0	0	1 (25%)
	Respuesta ciega	0	1 (25%)	1 (25%)
2ªPreesc	Centración en un solo dato	0	1 (25%)	0
	Dato problema (referente)	0	0	1 (25%)
1ªEGB	Dato problema (cant comp)	0	0	2 (50%)
	Sin determinar	0	2 (50%)	0

Representación de los errores en Igualación 1 según cursos y rendimiento

Gráfico 5.3.57 : 1ª de Preescolar

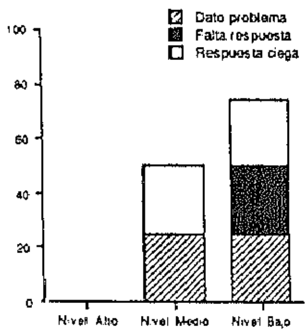


Gráfico 5.3.58 : 2ª de Preescolar

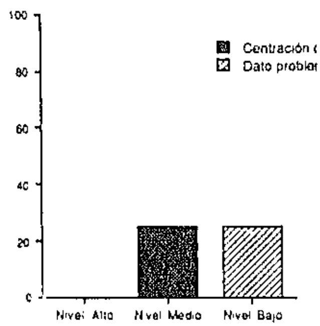
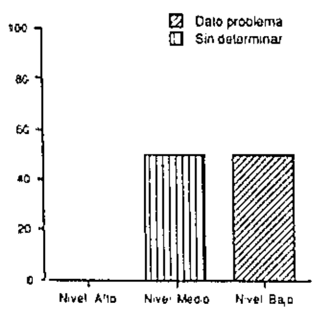


Gráfico 5.3.59



PROBLEMA IGUALACION 2 (Separar-Cambio desconocido)

Tabla 5.3.24 : Número de errores de cada tipo hallados en los distintos cursos:

Tipos de error	1º Preesc	2ºPreesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Respuesta ciega	1 (8,33%)	-	0	-	1 (2,08%)
Falta de respuesta	2 (16,67%)	-	0	-	2 (4,17%)
Dato problema (referente)	1 (8,33%)	-	0	-	1 (2,08%)
Dato problema (cant comp)	0	-	1 (8,33%)	-	1 (2,08%)
Expresar desconocimiento	1 (8,33%)	-	0	-	1 (2,08%)
Correspondencia óptica	0	-	1 (8,33%)	-	1 (2,08%)
Responder aproximación	0	-	2 (16,67%)	-	2 (4,17%)

Representación gráfica de los errores cometidos en Igualación 2

Gráfico 5.3.60 : Muestra total

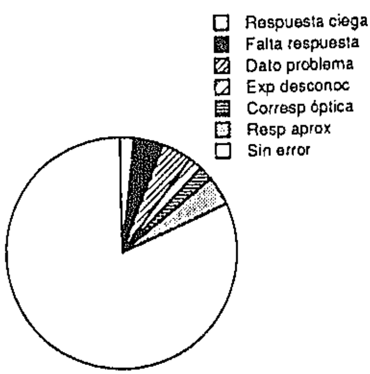


Gráfico 5.3.61 : Por cursos

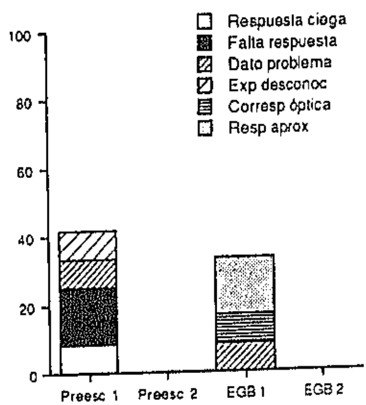


Tabla 5.3.25 : Frecuencias y porcentajes de los distintos tipos de error en el problema **Igualación 2**, según niveles de rendimiento dentro de cada curso:

Curso	Tipos de error	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel bajo
1ºPreesc	Respuesta ciega	0	0	1 (25%)
	Falta de respuesta	0	0	2 (50%)
	Dato problema (referente)	0	0	1 (25%)
	Expresar desconocimiento	1 (25%)	0	0
1ºEGB	Dato problema (cant comp)	0	0	1 (25%)
	Correspondencia óptica	0	0	1 (25%)
	Responder por aproximación	0	2 (50%)	0

Representación gráfica de los errores en Igualación 2 según cursos y niveles de rendimiento

Gráfico 5.3.62 : 1º de Preescolar

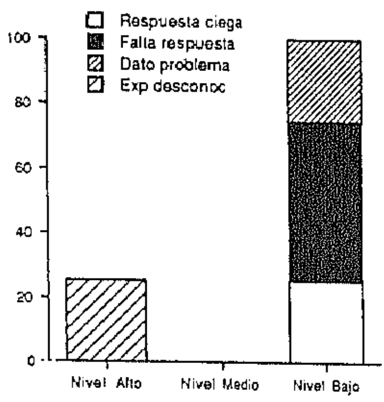
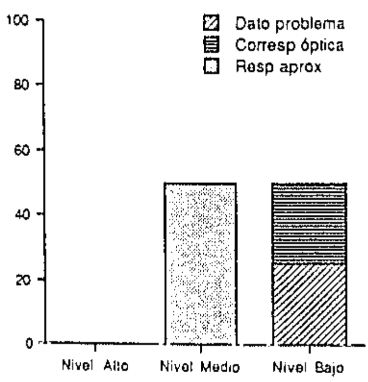


Gráfico 5.3.63 : 1º de EGB



PROBLEMA IGUALACION 3 (Juntar-Desconocida cantidad comparación)

Tabla 5.3.26 : Número de errores de cada tipo hallados en los distintos cursos:

Tipos de error	1ª Preesc	2ª Preesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Dato problema (diferencia)	1 (8,33%)	2 (16,67%)	3 (25%)	1 (8,33%)	7 (14,58%)
Dato problema (referente)	1 (8,33%)	0	0	0	1 (2,08%)
Olvidar dimen comparat	3 (25%)	1 (8,33%)	1 (8,33%)	0	5 (10,42%)
Confundir operación	0	0	2 (16,67%)	1 (8,33%)	3 (6,25%)
Falta de respuesta	1 (8,33%)	0	0	0	1 (2,08%)

Representación gráfica de los errores cometidos en el problema Igualación 3

Gráfico 5.3.64 : Muestra total

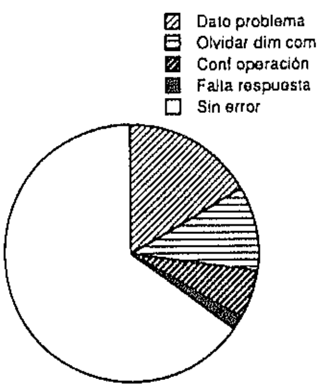


Gráfico 5.3.65 : Por cursos

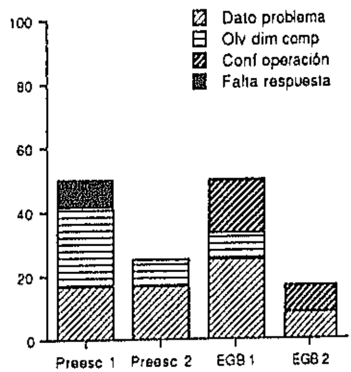


Tabla 5.3.27 : Frecuencias y porcentajes de los distintos tipos de error en el problema Igualación 3, según niveles de rendimiento dentro de cada curso:

Curso	Tipos de error	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel bajo
1ºPreesc	Dato problema (diferencia)	1 (25%)	0	0
	Dato problema (referente)	0	0	1 (25%)
	Olvidar dimensión comparat	0	2 (50%)	1 (25%)
	Falta de respuesta	0	0	1 (25%)
2ºPreesc	Dato problema (diferencia)	0	1 (25%)	1 (25%)
	Olvidar dimensión comparat	0	0	1 (25%)
1ºEGB	Dato problema (diferencia)	0	0	3 (75%)
	Olvidar dimensión comparat	0	1 (25%)	0
	Confundir operación (acción)	0	1 (25%)	1 (25%)
2ºEGB	Dato problema (diferencia)	0	0	1 (25%)
	Confundir operación (acción)	0	1 (25%)	0

Representación gráfica de los errores en el problema Igualación 3 según

Gráfico 5.3.66 : 1º de Preescolar

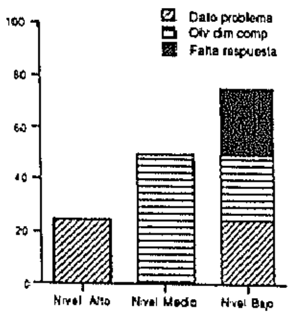


Gráfico 5.3.67 : 2º de Preescolar

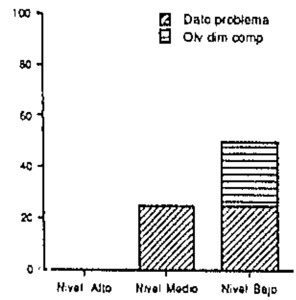


Gráfico 5.3.68 : 1º de EGB

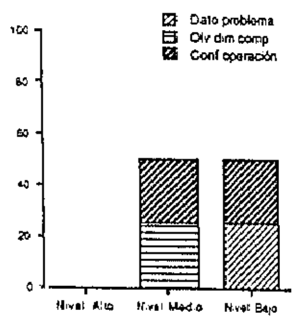
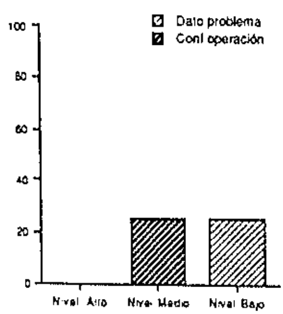


Gráfico 5.3.69 : 2º de EGB



PROBLEMA IGUALACION 4 (Separar-Desconocido térm comparación)

Tabla 5.3.28 : Número de errores de cada tipo hallados en los distintos cursos:

Tipos de error	1º Preesc	2º Preesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Dato problema (cambio)	0	1 (8,33%)	2 (16,67%)	0	3 (6,25%)
Dato problema (referente)	0	2 (16,67%)	1 (8,33%)	0	3 (6,25%)
Confundir operación	2 (16,67%)	0	0	0	2 (4,17%)
Respuesta cualitativa	2 (16,67%)	1 (8,33%)	0	0	3 (6,25%)
Expresar desconocimiento	1 (8,33%)	2 (16,67%)	0	0	3 (6,25%)
Partir de montón de fichas	1 (8,33%)	0	1 (8,33%)	2 (16,67%)	4 (8,33%)
Falta de respuesta	2 (16,67%)	0	1 (8,33%)	1 (8,33%)	4 (8,33%)
Responder aproximación	0	1 (8,33%)	1 (8,33%)	0	2 (4,17%)
Respuesta ciega	0	0	1 (8,33%)	0	1 (2,08%)

Representación gráfica de los errores en el problema Igualación 4

Gráfico 5.3.70 : Muestra total

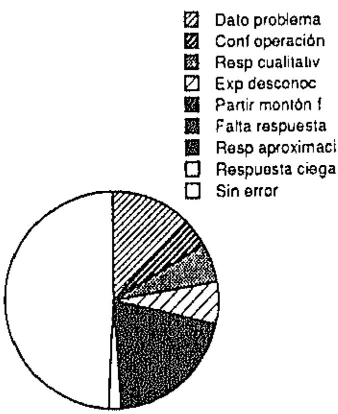


Gráfico 5.3.71 : Por cursos

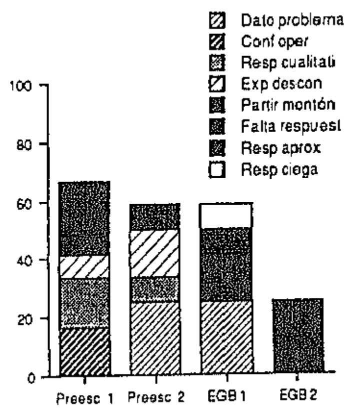


Tabla 5.3.29 : Frecuencias y porcentajes de los distintos tipos de error en el problema **Igualación 4**, según niveles de rendimiento dentro de cada curso:

Curso	Tipos de error	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel bajo
1ºPreesc	Confundir operación (acción)	1 (25%)	1 (25%)	0
	Respuesta cualitativa	1 (25%)	1 (25%)	0
	Expresar desconocimiento	0	1 (25%)	0
	Partir de un montón de fichas	0	1 (25%)	0
	Falta de respuesta	0	0	2 (50%)
2ºPreesc	Expresar desconocimiento	1 (25%)	1 (25%)	0
	Dato problema (cambio)	0	0	1 (25%)
	Dato problema (referente)	0	1 (25%)	1 (25%)
	Respuesta cualitativa	0	1 (25%)	0
	Responder por aproximación	0	1 (25%)	0
1ºEGB	Dato problema (cambio)	0	0	2 (50%)
	Dato problema (referente)	1 (25%)	0	0
	Partir de un montón de fichas	0	1 (25%)	0
	Falta de respuesta	0	0	1 (25%)
	Responder por aproximación	0	1 (25%)	0
	Respuesta ciega	0	0	1 (25%)
2ºEGB	Falta de respuesta	0	0	1 (25%)
	Partir de un montón de fichas	0	1 (25%)	1 (25%)

Representación gráfica de los errores cometidos en Igualación 4, según cursos y niveles de rendimiento

Gráfico 5.3.72 : 1º de Preescolar

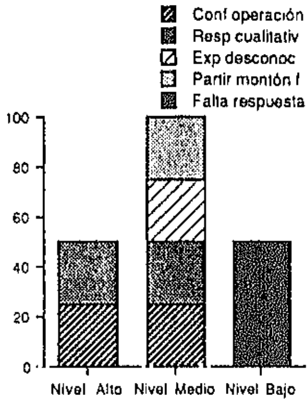


Gráfico 5.3.73 : 2º de Preescolar

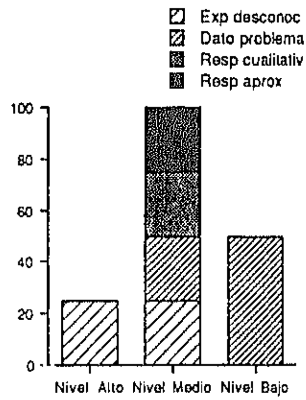


Gráfico 5.3.74 : 1º de EGB

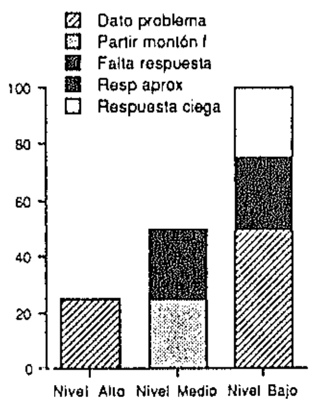
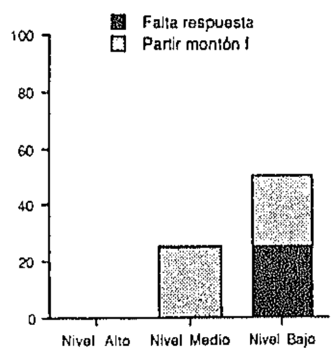


Gráfico 5.3.75 : 2º de EGB



PROBLEMA IGUALACION 5 (Juntar-Referente desconocido)

Tabla 5.3.30 : Número de errores de cada tipo hallados en los distintos cursos:

Tipos de error	1º Preesc	2º Preesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Confundir operación	0	0	1 (8,33%)	2 (16,67%)	3 (6,25%)
Dato problema (cambio)	2 (16,67%)	4 (33,33%)	3 (25%)	2 (16,67%)	11 (22,92%)
Dato problema (comp)	0	0	1 (8,33%)	0	1 (2,08%)
Respuesta cualitativa	2 (16,67%)	0	0	0	2 (4,17%)
Respuesta ciega	1 (8,33%)	0	0	0	1 (2,08%)
Expresar desconoc	2 (16,67%)	1 (8.33%)	0	0	3 (6,25%)
Respuesta aproximación	0	1 (8,33%)	0	0	1 (2,08%)
Correspondencia óptica	0	0	1 (8,33%)	0	1 (2,08%)
Falta de respuesta	1 (8,33%)	0	0	1 (8,33%)	2 (4,17%)

Representación gráfica de los errores cometidos en el problema Igualación 5

Gráfico 5.3.76 : Muestra total

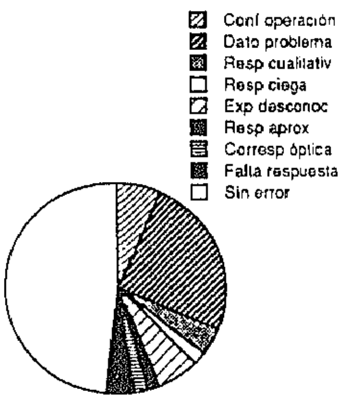


Gráfico 5.3.77 : Por cursos

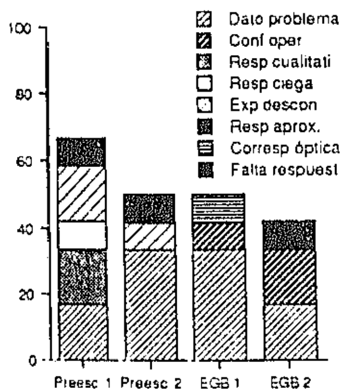


Tabla 5.3.31 : Frecuencias y porcentajes de los distintos tipos de error en el problema **Igualación 5**, según niveles de rendimiento dentro de cada curso:

Curso	Tipos de error	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel bajo
1ºPreesc	Dato problema (cambio)	0	1 (25%)	1 (25%)
	Expresar desconocimiento	1 (25%)	0	1 (25%)
	Respuesta cualitativa	0	1 (25%)	1 (25%)
	Respuesta ciega	0	1 (25%)	0
	Falta de respuesta	0	0	1 (25%)
2ºPreesc	Dato problema (cambio)	1 (25%)	1 (25%)	2 (50%)
	Expresar desconocimiento	0	1 (25%)	0
	Respuesta por aproximación	0	1 (25%)	0
1ºEGB	Confundir operación (acción)	0	1 (25%)	0
	Dato problema (cambio)	0	2 (50%)	1 (25%)
	Dato problema (term comp)	0	0	1 (25%)
	Correspondencia óptica	0	0	1 (25%)
2ºEGB	Confundir operación (acción)	0	0	2 (50%)
	Dato problema (cambio)	0	2 (50%)	0
	Falta de respuesta	0	0	1 (25%)

Representación gráfica de los errores cometidos en Igualación 5 según cursos y nivel de rendimiento

Gráfico 5.3.78 : 1º de Preescolar

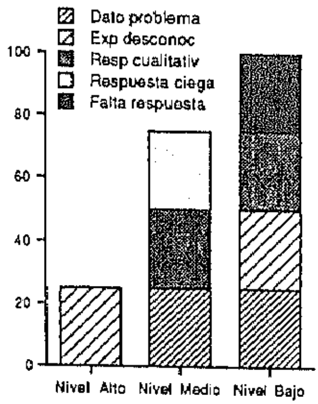


Gráfico 5.3.79 : 2º de Preescolar

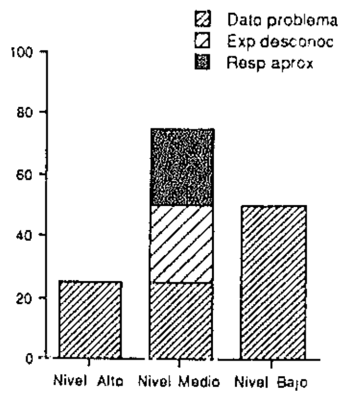


Gráfico 5.3.80 : 1º de EGB

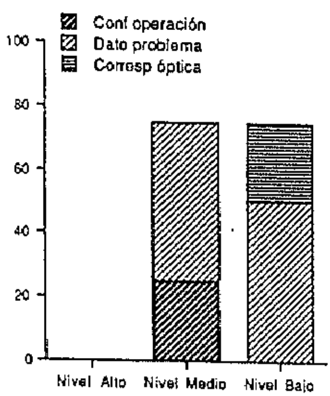
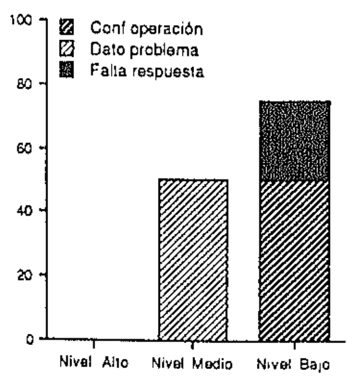


Gráfico 5.3.81 : 2º de EGB



PROBLEMA IGUALACION 6 (Separar-Referente desconocido)

Tabla 5.3.32 : Número de errores de cada tipo hallados en los distintos cursos:

Tipos de error	1º Preesc	2º Preesc	1ºEGB	2ºEGB	Total
Dato problema (cambio)	1 (8,33%)	0	0	0	1 (2,08%)
Dato problema (compar)	0	0	1 (8,33%)	1 (8,33%)	2 (4,17%)
Olvidar dim comparat	1 (8,33%)	0	1 (8,33%)	0	2 (4,17%)
Falta de respuesta	2 (16,67%)	0	2 (16,67%)	0	4 (8,33%)
Respuesta cualitativa	0	1 (8,33%)	0	0	1 (2,08%)
Confundir operación	0	0	0	2 (16,67%)	2 (4,17%)

Representación gráfica de los errores cometidos en el problema Igualación 6

Gráfico 5.3.82 : Muestra total

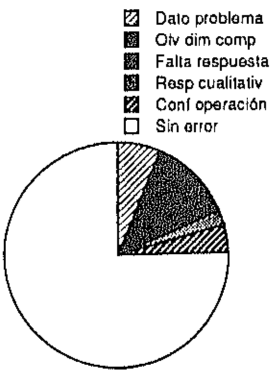
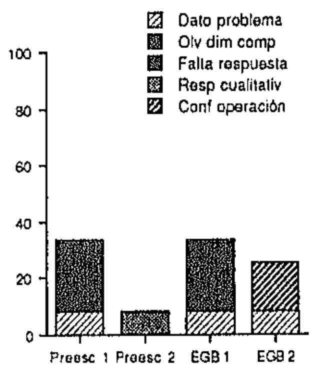


Gráfico 5.3.83 : Por cursos



Frecuencias y porcentajes de los distintos tipos de error en el problema **Igualación 6**, según niveles de rendimiento dentro de cada curso:

Curso	Tipos de error	Nivel Alto	Nivel Medio	Nivel bajo
1ºPreesc	Dato problema (cambio)	0	0	1 (25%)
	Olvidar dimensión comparat	0	1 (25%)	0
	Falta de respuesta	0	0	2 (50%)
2ºPreesc	Respuesta cualitativa	0	0	1 (25%)
1ºEGB	Dato problema (term comp)	0	0	1 (25%)
	Falta de respuesta	0	1 (25%)	1 (25%)
	Olvidar dimensión comparat	0	0	1 (25%)
2ºEGB	Dato problema (term comp)	0	0	1 (25%)
	Confundir operación (acción)	1 (25%)	1 (25%)	0

Representación de los errores en Igualación 6, según cursos y rendimiento

Gráfico 5.3.84 : 1º de Preescolar

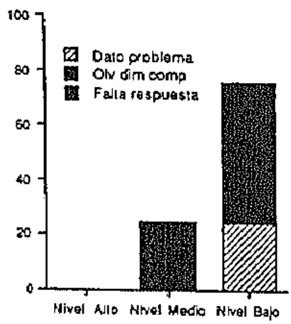


Gráfico 5.3.85 : 2º de Preescolar

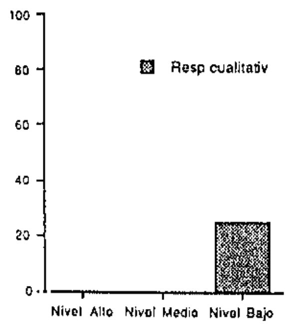


Gráfico5.3.86 : 1º de EGB

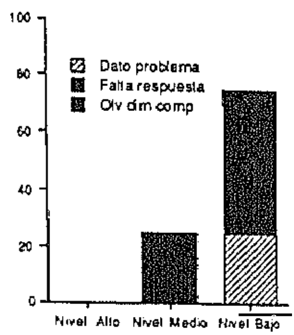
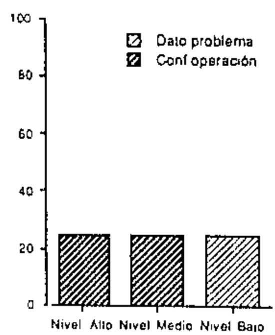


Gráfico 5.3.87 : 2º de EGB



TABLAS TOTALIZADORAS DE LOS TIPOS DE ERROR COMETIDOS EN LA RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS

Tabla 5.3.34 : Distribución de los errores en los distintos cursos escolares y en la muestra global

Errores	1º Preesc.	2º Preesc.	1º EGB	2º EGB	Total	%
Dato problema	39	44	47	9	139	45.28
Expresar desconocimiento	10	4	4	-	18	5.86
Respuesta cualitativa	18	5	1	-	24	7.82
Falta de respuesta	31	1	4	4	40	13.03
Respuesta por aproximación	1	4	3	-	8	2.61
Confusión de la operación	6	6	12	17	41	13.36
Centración en el color	1	-	1	1	3	0.98
Respuesta ciega	4	1	2	-	7	2.28
Olvidar dimensión comparativa	4	1	2	1	8	2.61
Partir de un montón de fichas	1	-	1	3	5	1.63
Centración en un solo dato	-	2	2	-	4	1.30
Expresar cantidad indeterminada	-	1	-	-	1	0.33
Dificultad manejo números	-	-	4	-	4	1.30
Fracaso aritmética formal	-	-	1	-	1	0.33
Correspondencia óptica	-	-	2	-	2	0.66
Sin determinar	-	-	2	-	2	0.66
TOTAL ERRORES	115	69	88	35	307	

Gráfico 5.3.88 : Representación del total de errores cometidos en el conjunto de los problemas por la muestra global

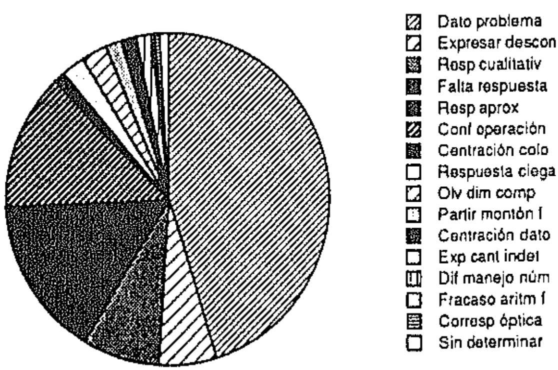


Tabla 5.3.35 : Distribución de los errores según niveles de rendimiento dentro de cada curso

1º de Preescolar

Errores	Nivel alto	Nivel medio	Nivel bajo
Dato problema	10 (52,63%)	15 (38,46%)	14 (24,56%)
Expresar desconocimiento	3 (15,79%	2 (5,13%)	5 (8,77%)
Respuesta cualitativa	4 (21,05%)	7 (17,95%)	7 (12,28%)
Falta de respuesta	0	6 (15,38%)	25 (43,86%)
Respuesta por aproximación	0	0	1 (1,75%)
Confundir la operación	1 (5,26%)	3 (7,89%)	2 (3,51%)
Centración en el color	1 (5,26%)	0	0
Respuesta ciega	0	2 (5,13%)	2 (3,64%)
Olvidar dimensión comparativa (1,75%)		0	3 (7,89%) 1
Partir de un montón de fichas	0	1 (2,56%)	0
TOTAL ERRORES	19	39	57

2º de Preescolar

Errores	Nivel alto	Nivel medio	Nivel bajo
Dato problema	4 (44,44%)	17 (68%)	23 (65,71%)
Expresar desconocimiento	1 (11,11%)	3 (12%)	0
Respuesta cualitativa	0	1 (4%)	4 (11,43%)
Falta de respuesta	0	0	1 (2,86%)
Respuesta por aproximación	1 (11,11%)	3 (12%)	0
Confusión de la operación	1 (11,11%)	0	5 (14,29%)
Respuesta ciega	1 (11,11%)	0	0
Olvidar dimensión comparativa	0	0	1 (2,86%)0
Centración en un solo dato	0	1 (4%)	1 (2,86%)
Expresar cantidad indeterminada		1 (11,11%)	0 0
TOTAL ERRORES	9	25	35

1º. de EGB

Errores	Nivel Alto	Nivel medio	Nivel bajo
Dato problema	10 (66,67%)	12 (42,86%)	25 (55,55%)
Expresar desconocimiento	1 (6,67%)	2 (7,14%)	1 (2,22%)
Respuesta cualitativa	0	1 (3,57%)	0
Falta de respuesta	0	1 (3,57%)	3 (6,67%)
Respuesta por aproximación	0	3 (10,71%)	0
Confundir la operación	3 (20%)	3 (10,71%)	6 (13,64%)
Centración en el color	0	1 (3,57%)	0
Respuesta ciega	0	0	2 (4,44%)
Olvidar dimensión comparativa	0	1 (3,57%)	1 (2,22%)
Partir de un montón de fichas	0	1 (3,57%)	0
Centración en un solo dato	0	1 (3,57%)	1 (2,22%)
Dificultad manejo números	0	0	4 (8,88%)
Fracaso aritmética formal	1 (6,67%)	0	0
Correspondencia óptica	0	0	2 (4,44%)
Sin determinar	0	2 (7,14%)	0
TOTAL ERRORES	15	28	45

2º de EGB

Errores	Nivel alto	Nivel medio	Nivel bajo
Dato problema	0	4 (28,57%)	5 (27,78%)
Falta de respuesta	0	0	4 (22,22%)
Confusión de la operación	3 (100%)	9 (69,23%)	5 (27,78%)
Centración en el color	0	0	1 (5,55%)
Olvidar dimensión comparativa	0	0	1 (5,55%)
Partir de un montón de fichas	0	1 (7,14%)	2 (11,11%)
TOTAL	3	14	18

Tabla 5.3.36 : Distribución de los errores según los problemas, en la muestra total

Problemas	Datoprobl	Resp.cualit.	Conf oper.	Centrar color	Minton	Centr.dato	Corr.opt
Cambio 2	-	2	1	-	-	-	
Cambio 3	9	3	-	-	-	-	-
Cambio 4	2	-	1	-	-	1	-
Cambio5	16	3	3	-	-	-	-
Cambio 6	10	1	3	-	1	1	-
Comb.1	-	1	-	-	-	-	-
Comb.2	7	1	8	2	-	-	-
Comp.1	19	6	5	-	-	-	-
Comp.2	27	1	3	-	-	1	-
Comp.3	12	-	8	1	-	-	-
Igual.1	4	-	-	-	-	1	-
Igual.2	2	-	-	-	-	-	1
Igual 3.	8	-	2	-	-	-	-
Igual.4	6	3	2	-	4	-	-
Igual.5	12	2	3	-	-	-	1
Igual.6	3	1	2	-	-	-	-

Problemas	Exp.descon	Falta respuesta	Aprox	Resp ciega	Olv.comp	Cant indet	Dif nº	Aritm formal
Cambio 2	-	2	-	-	-	-	-	-
Cambio 3	1	2	2	-	-	-	1	-
Cambio 4	1	2	-	-	-	-	-	-
Cambio5	3	2	-	1	-	1	-	1
Cambio 6	1	1	-	-	-	-	-	-
Comb.1	1	1	1	-	-	-	1	-
Comb.2	-	3	-	1	-	-	1	-
Comp.1	1	3	-	-	-	-	-	-
Comp.2	1	4	-	-	-	-	-	-
Comp.3	2	5	-	-	-	-	1	-
Igual.1	-	1	-	2	-	-	-	-
Igual.2	1	2	2	1	-	-	-	-
Igual 3.	-	1	-	-	5	-	-	-
Igual.4	2	4	2	1	-	-	-	-
Igual.5	3	2	1	1	-	-	-	-
Igual.6	-	4	-	-	2	-	-	-

6. DISCUSION DE LOS RESULTADOS

6.1. DIFICULTAD DE LOS PROBLEMAS VERBALES

Los problemas verbales no han resultado igualmente difíciles a los niños. En este apartado nos proponemos analizar las distintas variables que explican su dificultad relativa, considerando en primer lugar aquéllas que les son intrínsecas. En efecto, los problemas encierran mayor o menor dificultad según determinadas características propias. Hemos tratado de destacar éstas centrándonos en los resultados obtenidos en el conjunto de la muestra y poniéndolos en relación con los datos de las investigaciones consultadas.

Posteriormente nos detendremos en las variables relacionadas con los sujetos para ver cómo la edad/curso, los niveles de rendimiento escolar, la etapa del desarrollo cognitivo y el nivel de comprensión de las propiedades básicas de la aritmética, influyen en las puntuaciones totales obtenidas en los problemas.

Por último, analizaremos el efecto sobre las mismas de la interacción de un tipo y otro de variables.

6.1.1. Variables relativas a los problemas

Teniendo en cuenta la muestra en su conjunto, podemos formar, a partir de los porcentajes de respuestas correctas obtenidas, y tras situar las diferencias significativas entre los mismos, cuatro niveles de dificultad. Debemos tener en cuenta el carácter global y aproximativo de esta división, ya que es muy difícil encajar cada uno de los problemas en uno y sólo uno de los niveles establecidos.Tales niveles no coinciden cuando variamos la magnitud de los números.

Con números grandes, los problemas pueden distribuirse en orden de dificultad creciente , del siguiente modo :

1.- Cambio 1- Cambio 2-Combinación 1- Igualación 1- Igualación 2

2.- Cambio 4- Cambio 6- Comparación 1-Comparación 2-Igualación 3-Igualación 6.

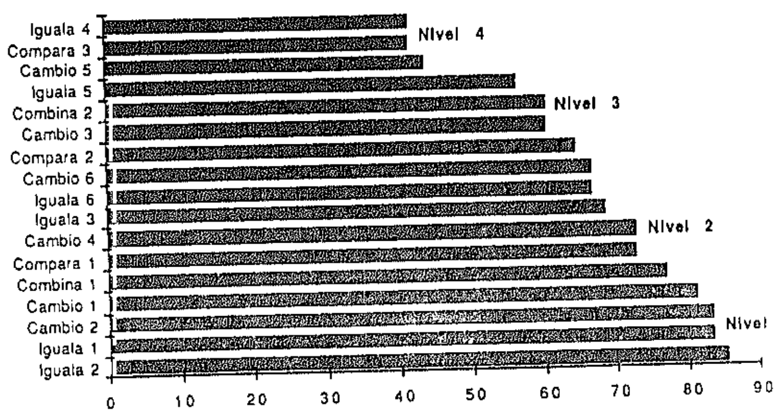
3.- Cambio 3- Combinación 2- Igualación 5

4.- Cambio 5- Comparación 3- Igualación 4.

El problema Combinación 1 no presenta diferencias significativas en proporción de respuestas correctas con problemas situados en el nivel 2 y en el nivel 1. Los problemas de Cambio 6, Igualación 6 y Comparación 2 se encuentran también en una posición intermedia entre los niveles 2 y 3. En el siguiente gráfico presentamos los distintos problemas en orden de dificultad creciente a partir de la base, y destacando los cuatro niveles indicados :

Gráfico 6.1.1

Niveles de dificultad de los problemas con números grandes

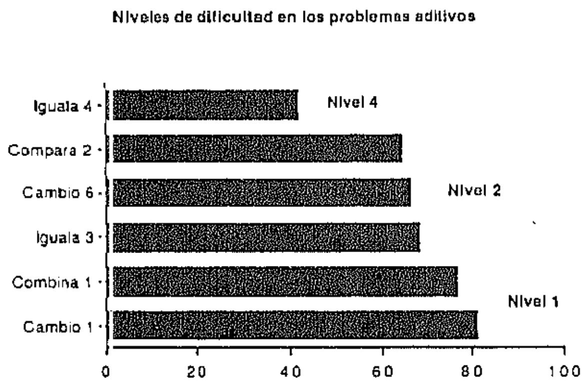


Estructura semántica de los problemas

A la vista de los datos, un primer resultado que merece destacar, es que los problemas con la misma estructura aritmética pero diferentes estructuras conceptuales difieren sustancialmente en su dificultad para los niños. Parece, por tanto, que no es suficiente el conocimiento de la aritmética formal para resolver los problemas aritméticos de enunciado verbal, sino que la estructura semántica constituye una variable influyente.

Así, los problemas que suponen la aplicación de la **operación aditiva** (Cambio 1, Cambio 6, Combinación 1, Comparación 2, Igualación 3 e Igualación 4), se encuentran dispersos en tres de los niveles indicados :

Gráfico 6.1.2



El problema aditivo más fácil, ha sido el de **Cambio 1** (Cambio-Juntar desconociendo el resultado). Como hemos descrito anteriormente, en el problema de Cambio 1 está implicada una **acción** que lleva a un incremento de una cantidad dada. Conociendo ésta y la magnitud del cambio, el niño tiene que hallar el conjunto resultado. En este tipo de problemas está presente la **concepción unitaria de la suma**, entendiendo la operación aditiva como un cambio de estado, es decir, en un sentido dinámico, en lugar de centrarse en las relaciones estáticas entre los sumandos. Fuson (1.988) enfatiza esta distinción entre la concepción unitaria -presente en los problemas de Cambio-y binaria de la suma como base para la clasificación de los problemas aditivos. Se formula como hipótesis que la concepción unitaria de la suma y resta- propia de los problemas de Cambio- precede en su adquisición a la operación binaria (Maza,1.989) La mayor facilidad de los problemas como éste, ha sido señalada por los distintos autores que han tratado de identificar la dificultad relativa de los problemas verbales con distinta estructura semántica.(Carpenter y Moser, 1.982, 1.983, 1.984; Ibarra y Lindvall, 1.979; Riley, 1.981; Riley, Greeno y Heller, 1.983; Vergnaud, 1.982...).

Briars y Larkin (1.984) explican su mayor facilidad por presentar señales de acción -sobre la base de su modelo predicen que los problemas con señales de acción son más fáciles que los problemas que no disponen de las mismas- y utilizar únicamente para su solución contadores de un sólo rol, es decir, por no haber ninguna necesidad de considerar un elemento como miembro de más de un conjunto- lo que define en su modelo, el primer nivel de dificultad.

El siguiente problema aditivo en orden de dificultad creciente es el de **Combinación 1.** Este problema describe relaciones estáticas entre una entidad y sus dos partes, de modo que conociendo éstas hay que hallar la primera. El concepto de suma implicado es, por tanto el binario. A pesar de estas diferencias en las relaciones semánticas y en el concepto formal de la suma, con el problema Cambio 1, es muy semejante a éste en la presentación de los datos : en ambos problemas se proporcionan los dos sumandos y hay que averiguar el total. Aunque resulta algo más difícil que Cambio 1 (77,08% de respuestas correctas frente a 81,25%), la diferencia no alcanza significatividad estadística.

Este mismo resultado ha sido hallado en numerosos estudios (Carpenter, Hiebert y Moser, 1.981; Carpenter y Moser, 1.982; Ibarra y Lindvall, 1.979; Riley, Greeno y Heller, 1.983; Steffe y Jhonson, 1.971; Shores y Underhill, 1.976). Carpenter y Moser (1.983), en su investigación longitudinal con los niños de 1º a 3º grado encontraron el mismo pattern de respuestas en los dos problemas, no sólo en porcentajes correctos, sino, como veremos más adelante, en las estrategias utilizadas, llegando a la conclusión de que los niños tratan los problemas aditivos de Juntar y Combinar como si fueran equivalentes. Esto es lo mismo que indican Briars y Larkin (1.984) cuando explican la semejanza en dificultad en ambos problemas por el posible empleo del esquema unitario (como hemos dicho presumiblemente más sencillo) por parte de los niños tanto en el problema de Cambio 1 como en el de Combinación 1. Según estos autores, la situación estática del problema Combinación 1 se traduce en acciones, sin requerir, como ocurre en el caso de Combinación 2, la habilidad de utilizar contadores de doble rol. Riley, Greeno y Heller (1.983), indican que este problema resulta fácil a los niños preescolares ya que no supone la comprensión de las relaciones parte-todo.

El problema **Igualación 3** (Equivalencia-Juntar. Desconocido el término de comparación), contiene relaciones dinámicas entre los datos y la acción descrita en el problema lleva a un incremento de la cantidad inicial, lo mismo que ocurre en el problema Cambio 1. Hemos situado este problema en un segundo nivel de dificultad, siendo su porcentaje de corrección significativamente inferior al de Cambio 1. Resulta algo más difícil que el de Combinación 1 pero en este caso la diferencia no alcanza significatividad estadística. La escasa presencia de este tipo de problemas en la literatura sobre el tema, apenas permite una contrastación de estos resultados.

El problema de **Cambio 6** (Cambio-Separar, desconociendo el comienzo), a pesar de presentar una misma estructura semántica -Cambio- y aritmética -Adición- y suponer la misma concepción unitaria de la suma, resulta ser significativamente más difícil que el problema Cambio 1, hallándose, como hemos indicado, entre los niveles 2 y 3 de la clasificación realizada. Esta variación en el grado de dificultad podría depender de otra variable que está interrelacionada con la estructura semántica y que comentaremos más adelante : la identificación de la incógnita

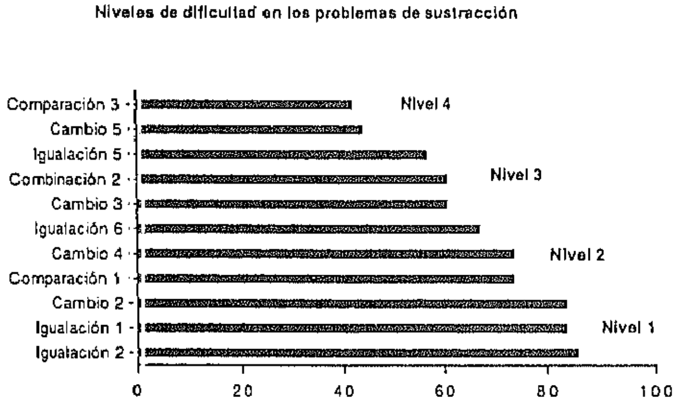
Los problemas de Cambio 1 y Combinación 1 resultan significativamente más fáciles que el de **Comparación 2** incluso cuando se presenta con explicación, omitiendo los términos comparativos ("Pedro tiene 7 libros de cuentos. Jaime tiene los mismos que Pedro y 9 más. ¿Cuántos libros de cuentos tiene Jaime?"). En este problema, se conoce la diferencia entre las dos cantidades que se comparan así como el referente, y se trata de averiguar la cantidad de comparación. La sentencia implicada es la misma que en los dos problemas mencionados : a+b=?, subyaciendo el concepto binario de la suma como en el caso de Combinación. A pesar de la semejanza que guarda en su forma modificada con la estructura de este último problema, su indice de dificultad es más elevado, lo que nos indica que no son psicológicamente equivalentes. Resulta también algo más difícil que los problemas Cambio 6 e Igualación 3, pero las diferencias no llegan a ser significativas en ninguno de los dos casos.

Cuando se presenta del modo como es usual en este tipo de problemas, utilizando la expresión "Jaime tiene 9 libros más que Pedro", el problema de Comparación 2 resulta ser el más difícil de los problemas aditivos presentados en este estudio. En el marco de referencia de Briars y Larkin (1.984), la razón para esta dificultad es que no describe acciones que un niño pueda imitar.

El problema de **Igualación 4** (Equivalencia-Quitar. Desconocido el término de comparación) ha resultado ser el problema aditivo más difícil de todos los planteados, si exceptuamos el de Comparación 2 sin explicación. Las diferencias que presenta con todos ellos en porcentaje de respuestas correctas son altamente significativas..

De modo similar, los problemas que suponen **sustracción** varían también en dificultad según las estructuras semánticas y el lugar del dato desconocido, quedando dispersos en los cuatro niveles indicados. De nuevo nos encontramos con que los problemas que difieren en las dos variables mencionadas, no son igualmente difíciles aunque requieran la misma operación para la solución. Esto sugiere, como han indicado Riley, Greeno y Heller (1.983), que resolver un problema verbal requiere más que conocer las operaciones aritméticas y tener algunas habilidades generales en aplicarlas.

Gráfico 6.1.3



Como queda expresado en el gráfico, los problemas de sustracción más fáciles han sido los de **Cambio 2** (Cambio-Separar. Resultado desconocido) , **Igualación 1** (Equivalencia-Juntar. Cambio desconocido) e **Igualación 2** (Equivalencia-Separar. Cambio desconocido). En los tres problemas las relaciones entre los datos son dinámicas (frente a lo que ocurre en los problemas de Combinación y Comparación). Como venimos diciendo, este hecho puede hacer más sencilla la tarea a los niños.

Este resultado se ve confirmado en el trabajo de Carpenter, Hiebert y Moser (1.981), quienes encuentran en los niños de 1º grado una proporción de respuestas correctas en los problemas de Igualación 1 e Igualación 2 (0,91), semejantes a las obtenidas en los problemas Cambio 1 y Cambio 2. Sin embargo, refiriéndose únicamente a los cursos de 2º de Preescolar y 1º de EGB, Bermejo y Rodríguez (1.987), llegan a afirmar, en general, la gran complejidad de estos problemas para los niños pequeños e incluso la incapacidad de los niños preescolares para

para construir una representación mental adecuada de los mismos, lo que no coincide con nuestros resultados.

En el segundo nivel de dificultad nos encontramos con los problemas sustractivos de **Cambio 4** (Cambio- Separar. Cambio desconocido) y **Comparación 1** (desconocida la diferencia), este último con explicación, es decir, omitiendo los términos de comparación ("¿Cuántas chicas sobran para que haya el mismo número que chicos?" en lugar de "¿Cuántas chicas hay más que chicos?"). En el enunciado modificado aparecen claramente señales de acción, lo que, como hemos visto, en opinión de Briars y Larkin (1.984) facilitaría la tarea a los niños. Esta equiparación en dificultad ha sido indicada por otros autores (Maza, 1.989).

Cuando se presentan de la forma como es usual, los problemas de Comparación son mucho más difíciles que otros problemas de sustracción, tal y como encontramos de una forma consistente en la literatura (Gibb, 1.956, Briars y Larkin, 1.984, Nesher, 1.982, Riley, Greeno y Heller,1.983, Schell y Burns,1.962, Shores y Underhill, 1.976..). Para Riley, Greeno y Heller (1.983), el fallo de los niños de Preescolar y 1º grado en la solución del problema Comparación 1 está asociado a la falta de un esquema para comprender la situación del problema de modo que conecte con el esquema de acción disponible (emparejar).

A continuación, nos encontramos en la escala de dificultad, con los problemas **Cambio 3** (Cambio-Juntar. Cambio desconocido), **Combinación 2** (desconocida una parte), **Igualación 5 e Igualación 6**. La semejanza en nivel de dificultad de los dos primeros problemas, ha sido hallada también en los estudios de Carpenter, Hiebert y Moser (1.981) en niños de 1º grado (las proporciones de respuestas correctas son respectivamente de 0,72 y 0,77), Tamburino (1.980) en niños de Preescolar (en este caso la proporciones son de 0,08 y 0,18, algo mayor en Cambio 3).

Sin embargo, en Riley (1.981) el problema de Cambio 3 resulta ser en Preescolar, 1º y 2º grado, más fácil que el de Combinación 2, igualándose ambos problemas en el máximo de respuestas correctas al llegar a 3º grado. El mismo resultado obtienen Steffe y Jhonson (1.971) en niños de 1º grado. Para Riley, Greeno y Heller (1.983), la solución al problema Combinación 2, que exige la comprensión de las relaciones parte todo, supone un modelo más complejo (modelo 3), que el exigido para dar solución correcta al problema Cambio 3 (modelo 2). En los dos problemas sería necesario mantener internamente las características del problema, pero, además, el problema Combinación 2 exige una representación arriba-abajo que permita la comprensión de las relaciones parte-todo. Este último problema debería situarse, en opinión de estos mismos autores, en un mismo nivel de dificultad no con el problema Cambio 3, sino con los problemas Cambio 5 y Cambio 6. Predicción que no se cumple en nuestro estudio.

Los problemas **Igualación 5** (Igualar-Añadiendo. Referente desconocido) e **Igualación 6** (Igualar-Quitando. Referente desconocido) son de la misma estructura semántica y en los dos se desconoce el referente, difiriendo sólo en el signo de la acción implicada, lo mismo que ocurre en los problemas Cambio 3 y Cambio 4. Del mismo modo que en estos últimos problemas, ha resultado más difícil el problema que supone la acción de Añadir (en este caso Igualación 5) y la razón podría estar también, siguiendo a Riley, Greeno y Heller (1.983), en que exige mantener una representación estructural de la situación descrita en el problema, lo que no ocurre en el problema Igualación 6. En efecto, el problema Igualación 5 es el paralelo a Cambio 3 mientras que Igualación 6 lo es a Cambio 4 (tengamos en cuenta que los problemas de Igualación constituyen un híbrido de problemas de Comparación y de Cambio). Sin embargo, en nuestro estudio, cuando consideramos la muestra en su conjunto, la diferencia no llega a ser significativa, al igualarse los porcentajes de respuestas correctas en EGB. No podemos contrastar estos resultados al no disponer de otros estudios que hayan comparado en dificultad los distintos problemas de Igualación.

Los problemas de sustracción más difíciles han sido los de **Cambio 5** (Juntar-Comienzo desconocido) y **Comparación 3** (Referente desconocido) , incluso con explicación. La gran dificultad de tales problemas ha sido indicada por diferentes estudiosos del tema (Riley, 1.981).

Según Riley, Greeno y Heller (1.983), el hecho de operar con una cantidad cuyo valor se desconoce - como ocurre en el problema de sustracción Cambio 5, exige el modelo de actuación más complejo de los ideados por ellos (modelo 3), en el que lo característico es la actuación de "arriba a abajo", permitiendo una representación completa del problema antes de resolverlo.

El problema Comparación 3 comparte la dificultad de todos los problemas de Comparación ya mencionada. A esto hay que añadir la derivada de las señales lingüísticas inconsistentes con la operación a realizar ("Luis ha pescado 16 peces. Luis ha pescado 9 peces **más** que Carla. ¿Cuántos peces ha pescado Carla?"). Los niños tienen que reaccionar a la palabra más con la operación de restar, o bien con la acción de quitar contadores del conjunto de partida. De este modo, según Briars y Larkin (1.984) problemas de este tipo son probablemente los más difíciles en requerimientos lingüísticos.

Hemos podido ver cómo los problemas de Cambio, Combinación, Comparación e Igualación, a pesar de resolverse con procesos matemáticos semejantes, difieren en su grado de dificultad para los niños. Considerando los problemas de adición más afines formalmente (Cambio 1, Combinación 1, Comparación 2 (sin explicación) e Igualación 3), comprobamos que pueden ordenarse en dificultad creciente del siguiente modo : Cambio 1, Combinación 1, Igualación 3 y Comparación 2. Una secuencia semejante obtenemos cuando tratamos de ordenar los problemas de sustracción más próximos : Cambio 2, Combinación 2, Igualación 6 y Comparación 1 (sin modificación del enunciado). Esto nos permite valorar la importancia que la estructura semántica tiene en la dificultad relativa de los problemas.

Una mayor explicación de la influencia de esta variable la encontraremos más adelante, cuando nos detengamos en los procedimientos seguidos por los niños para encontrar solución a los distintos tipos de problemas.

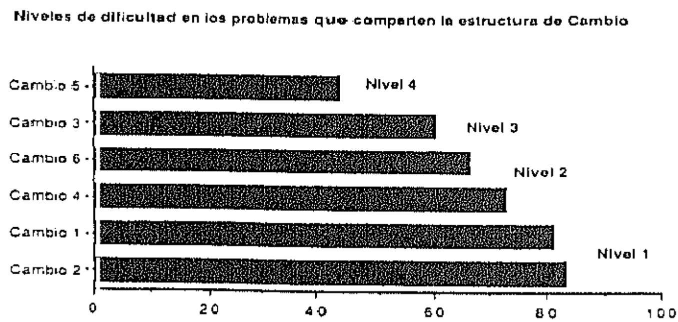
Sobre la base de la secuencia que acabamos de indicar, podríamos especular que los conceptos de Cambio, Combinación, Igualación y Comparación, se adquieren secuencialmente en distintos momentos del desarrollo cognitivo : en primer lugar los niños serían capaces de resolver los problemas de Cambio únicamente, después conseguirían solucionar también los de Combinación, a continuación los de Igualación y, por último los de Comparación. Sin embargo, como hemos visto, las cosas no son tan sencillas ya que los problemas que comparten una misma estructura semántica difieren, de forma significativa muchas veces, en dificultad para los niños.

Lugar del dato desconocido

Una explicación de esta diferenciación dentro de los problemas que comparten una misma estructura semántica, podemos encontrarla en la **identificación de la incógnita** en cada uno de ellos.

Así, los problemas de **Cambio** se hallan dispersos en los cuatro niveles de dificultad señalados : los más fáciles han sido los problemas Cambio 1 y Cambio 2 (nivel 1), seguidos por Cambio 4 (nivel 2), Cambio 6 (a caballo entre los niveles 2 y 3), Cambio 3 (nivel 3) y Cambio 5 (nivel 4).

Gráfico 6.1.4



Los problemas situados en el nivel de mayor facilidad, **Cambio 1** y **Cambio 2**, coinciden en situar el término desconocido en el **resultado**.: **(8+6=?)** y **(11-7= ?)** respectivamente. Como se sabe, las sentencias canónicas son más sencillas que las no canónicas y este hecho parece influir en el nivel de dificultad de los problemas en las que están implicadas. Los resultados reseñados en la literatura coinciden en señalar la capacidad de resolver este tipo de problemas incluso en los niños más pequeños (Carpenter, Hiebert y Moser, 1.981; Riley, 1.981; Riley, Greeno y Heller, 1.983; Tamburino, 1.980...). Igual que en estos estudios, aunque los resultados en estos dos problemas de Cambio son muy semejantes, el porcentaje de respuestas correctas es algo mayor en Cambio 2 (sustracción).

Para Briars y Larkin (1.984) el resolver estos problemas sólo supone la habilidad de mover y contar fichas, sin que éstas sean consideradas como miembro de más de un conjunto al mismo tiempo. Se trata de problemas con señales de acción que pueden modelarse físicamente De ahí su gran facilidad.

El problema **Cambio 4 (11-?=4)**, en el que se dan el comienzo y el resultado y se pregunta acerca de la magnitud del cambio, ha resultado para los niños, cuando se tiene en cuenta el conjunto de la muestra, más difícil que los anteriores, aunque su diferencia con el problema Cambio 1 no alcanza significatividad estadística. En nuestra clasificación, como se recordará, lo hemos situado en el nivel 2.

Sin embargo, el problema **Cambio 3 (5+?=13)**, que tiene situada la incógnita en el mismo lugar que Cambio 4, ha resultado ser significativamente más difícil, y lo hemos colocado en un nivel de mayor dificultad (nivel 3). Esta diferencia se encuentra también en los trabajos de Hiebert (1.981), Riley (1.981), Tamburino (1.980)...

Riley,Greeno y Heller(1.983) indican que, a pesar de que ambos problemas incluyan un conjunto de cambio desconocido, el problema Cambio 3 es más difícil para los niños pequeños que el problema Cambio 4, ya que exige que el niño diferencie claramente en la representación que se hace del problema, el conjunto inicial del conjunto cambio. Según estos autores, el modelo 1 (propio del nivel de realización más elemental) es suficiente para resolver el problema Cambio 4 (así como los problemas Cambio 1 y Cambio 2). Cuando utiliza ayudas manipulativas, el niño tiene a la vista, en estos tres problemas de Cambio, el conjunto de objetos que constituye la solución. De este modo, resolver el problema Cambio 4 supone reducir el conjunto inicial de 11 piruletas a 4, teniendo presentes y físicamente separados, el conjunto resultado y el conjunto cambio, con lo que éste puede ser fácilmente identificado. La solución de este problema no exige, por tanto, retener en la memoria las relaciones estructurales del mismo (característica propia del modelo 2) lo que -en opinión de Riley, Greeno y Heller- es imprescindible para resolver el problema Cambio 3. No todos los autores recogen esta diferencia en dificultad entre un problema y otro. Así, Maza (1.989) sitúa en el mismo nivel ambos problemas.

El problema de Cambio más difícil ha sido el problema **Cambio 5**.(**? + 8 = 12**). En este problema igual que en el de **Cambio 6** (**?-7 =4**), el dato desconocido se encuentra en el **punto de partida**. Sin embargo, también entre ellos hemos hallado diferencias significativas que nos han llevado a ubicarlos en distinto nivel de dificultad. Mientras que el problema Cambio 5 (Juntar), se encuentra en el de mayor dificultad (4), Cambio 6 (Separar), ha resultado más difícil que Cambio 4 (nivel 2) y más fácil que Cambio 3 (nivel 3), pero sin que las diferencias con estos dos problemas alcancen significatividad estadística.

La identificación de la incógnita, siendo una variable que se revela importante, no es suficiente para dar cuenta de los distintos grados de dificultad entre problemas que comparten una misma estructura semántica. Hay que considerar la influencia de otras variables. Quizá el signo de la acción implicada en el problema tenga algún efecto sobre su dificultad relativa. En nuestro estudio hemos encontrado de forma consistente, que, a igualdad de otras características, los problemas de **Cambio-Juntar** son **más difíciles que los de Separar** (Cambio 1 ligeramente más difícil que Cambio 2; Cambio 3 significativamente más difícil que que Cambio 4; Cambio 5 significativamente más difícil que Cambio 6. La explicación de esta desigualdad, debemos buscarla en el análisis de las estrategias seguidas por los niños de diferentes cursos cuando tratan de solucionar unos problemas y otros.

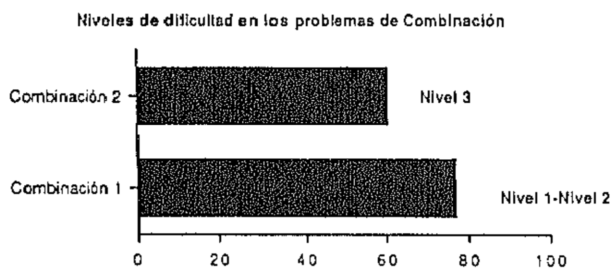
Consultando la literatura, no encontramos entre los problemas Cambio 5 y Cambio 6 esta diferencia tan marcada en nivel de dificultad. En Riley (1.981), el problema Cambio 6 es algo más fácil en Preescolar y 1º grado pero se invierte la diferencia en 2º y 3º grado, de manera que, en conjunto,resultan igualmente difíciles. En Tamburino (1.980), Cambio 6 ha resultado algo más difícil que Cambio 5, pero con proporciones de corrección muy parecidas. En el modelo que proponen Riley, Greeno y Heller (1.983), estos dos problemas son equivalentes en dificultad (nivel 3). No obstante, como indican Briars y Larkin (1.984), los datos no son concluyentes en este punto (Briars, 1.982, Hiebert, 1.982, Riley, Greeno y Heller, 1.983, Tamburino, 1.980).

Briars y Larkin plantean la necesidad de trabajo posterior que investigue las diferencias entre los dos tipos de problemas. Para estos autores, Tanto Cambio 5 como Cambio 6 no pueden resolverse por modelado directo, sino que requieren una representación mental de la situación del problema, previa a su realización, es decir, exigen un procesamiento de arriba a abajo. Un modo de resolver estos problemas consiste en realizar la acción en sentido inverso - lo que exige el esquema que denominan "transfer"(la reversibilidad piagetiana)-. Una forma alternativa de resolver problemas como Cambio 5 (? + b = c) supone reconocer que los papeles del conjunto inicial (desconocido) y del conjunto de incremento (8) son matemáticamente intercambiables.-lo que exige un esquema de "equivalencia de subconjuntos". Cuando los papeles de estos dos conjuntos se invierten, el problema Cambio 5 se simplifica notablemente, haciéndose equivalente al problema Cambio 3 (a + ? = c), que puede resolverse con contadores de doble rol. Este conocimiento no simplifica, sin embargo, problemas como Cambio 6 (? -b = c), porque sólo dá lugar a problemas equivalentes (? - b = c). Estos autores agrupan en sus discusiones estas dos capacidades -transferencia y equivalencia de subconjuntos-, indicando que su discriminación exige nuevas investigaciones y análisis empíricos, teniendo en cuenta no sólo los porcentajes de respuestas correctas sino también las estrategias de los niños, que podrían ser diferentes en función de si utilizan los esquemas de equivalencia de subconjuntos o de inversión en el tiempo.

Posteriormente nos detendremos en buscar la razón de la diferencia hallada, analizando las estrategias y los errores cometidos en el intento de solucionar estos problemas. En un principio, y sobre la base de la interpretación de Briars y Larkin, el hecho de que el porcentaje de respuestas correctas en Cambio 6 sea considerablemente mayor que en Cambio 5 sugiere que la equivalencia de subconjuntos -que facilita sólo el problema Cambio 5-es una capacidad que el niño adquiere más tarde que la de transferencia -que se puede aplicar a ambos problemas pero resulta más difícil en Cambio 5,al implicar la operación de resta-.

También varía la dificultad de los problemas de **Combinación** dependiendo de qué valor en el problema es el desconocido. **Combinación 2** , en el que se desconoce una de las partes es significativamente más difícil (nivel 3 en nuestra clasificación de dificultad relativa) que **Combinación 1** en el que las dos partes se desconocen y el problema consiste en determinar el valor de la combinación (entre los niveles 1 y 2).

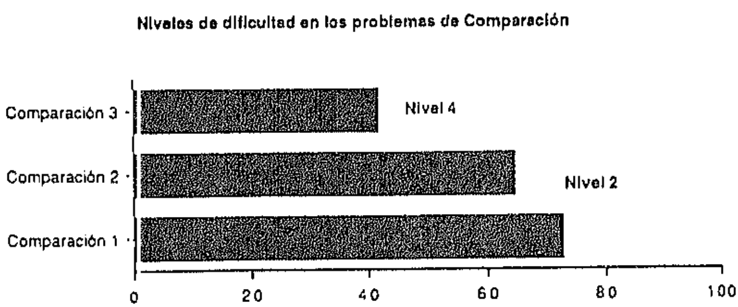
Gráfico 6.1.5



El mismo resultado hemos hallado en las obras consultadas (Carpenter, Hiebert y Moser, 1.981; Riley, 1.981; Steffe y Johnson, 1.971; Tamburino, 1.980...). Como ya hemos comentado, el problema Combinación 1 es equivalente a Cambio 1 y no parece suponer la comprensión de las relaciones parte-todo, que están implicadas en la solución del problema Combinación 2 (Briars y Larkin, 1.984; Riley, Greeno y Heller, 1.983...)

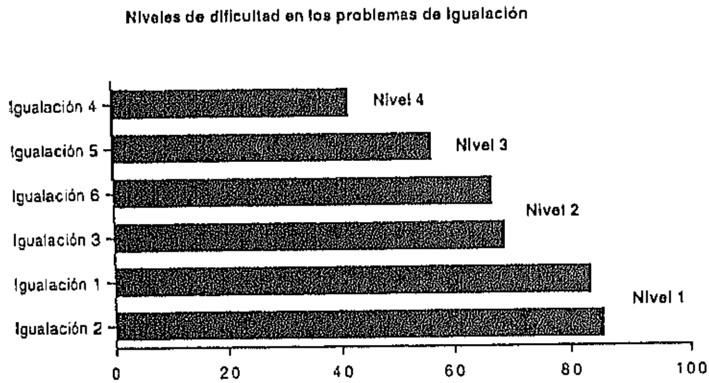
Los problemas de **Comparación**, planteados con explicación se hallan asimismo repartidos en distintos niveles de dificultad : El problema **Comparación 3**, en el que se desconoce el **referente** es más difícil que que los otros dos problemas de esta misma estructura semántica planteados. La identificación de la incógnita puede ser una variable que pueda añadirse a las comentadas más arriba para dar explicación de la gran dificultad de este problema. El segundo en dificultad se sitúa el problema **Comparación 2** en el que se desconoce la cantidad de comparación y el más fácil de estos problemas ha resultado ser **Comparación 1** en el que la incógnita es la diferencia entre las cantidades dadas. Esta misma secuencia en dificultad de los problemas de Comparación según el lugar ocupado por la incógnita se recoge también en otros estudios consultados (Briars y Larkin, 1.984; Carpenter, Hiebert y Moser, 1.981; Riley, 1.981...).

Gráfico 6.1.6



Por último, los 6 problemas de **Igualación** se distribuyen en los cuatro niveles de dificultad que hemos establecido : Igualación 1 e Igualación 2 (nivel 1), Igualación 3 e Igualación 6 (nivel 2) Igualación 5 (nivel 3) e Igualación 4 (nivel 4).

Gráfico 6.1.7



En los problemas **Igualación 1** e **Igualación 2** hay que hallar -igual que en Comparación 1- la **diferencia entre las dos cantidades** que se proporcionan, es decir, el dato desconocido es el **cambio** que hay que introducir en una de ellas para igualarla a la otra y -lo mismo que en los problemas de Comparación- este lugar de la incógnita parece hacer al problema más sencillo que cuando se ignora el término de comparación o el referente.

Los problemas **Igualación 3** e **Igualación 4** son equivalentes en la ubicación de la incógnita al problema Comparación 2 (el dato desconocido es el **término de comparación**) , lo que nos llevaría a colocarlos en un nivel de dificultad mayor que los anteriores, pero, a su vez, menor que aquéllos en los que desconoce el **referente** (**Igualación 5** e **Igualación 6**) Nuestros datos, como hemos indicado, se ajustan a este esquema en el caso de Igualación 3, pero no en el de Igualación 4 que ha resultado ser el más difícil de los problemas de Igualación. La explicación de la gran dificultad que ofrece este problema la encontramos en que parte de un dato desconocido ("Hay un montón de tenedores en la mesa"). Ya nos hemos referido a la confusión que esta circunstancia crea en los niños y volveremos a ella cuando analicemos los procedimientos que siguen los niños al intentar hallar la solución, así como los errores cometidos en este intento.

Contexto lingüístico

Un factor que se ha revelado muy importante en relación con el grado de dificultad de los problemas ha sido el contexto lingüístico de los mismos, lo que hemos podido comprobar de una forma especialmente clara en los problemas de Comparación.

Cuando se plantean del modo como es habitual, es decir, utilizando los términos comparativos, estos problemas han resultado los más difíciles de los planteados. De los 48 niños que forman nuestra muestra, sólo 10, el 20,83%, resuelven los tres problemas comparativos sin necesidad de explicación (habiéndolos aplicado con números grandes en EGB y con números pequeños en Preescolar).

Ante la gran dificultad hallada en la solución de estos problemas, los reformulamos para averiguar si el obstáculo residía en una falta de esquemas de acción para planificar la solución, o bien se trataba de un fallo en la comprensión de los mismos. En la modificación de los enunciados tratamos de omitir la expresión "más que" (que sospechábamos el obstáculo lingüístico), pero manteniendo la misma estructura semántica y aritmética.

El proceso de comparar es bastante complejo : supone crear primero dos conjuntos para ser comparados, emparejarlos en correspondencia uno a uno y por fin, identificar y contar la diferencia entre los dos.

Podria concluirse, por tanto, que los niños más pequeños no han adquirido todavía este procedimiento relativamente complejo y que esta laguna es responsable de su pobre realización en los problemas de Comparación.

Sin embargo, esta hipótesis no se ha visto confirmada en nuestro trabajo, ya que los porcentajes de respuestas correctas aumentaron de forma estadisticamente significativa (los valores de la razón crítica Z son siempre superiores a 2,33, por lo que $p \leq 0,01$)

El problema **Comparación 1** ("Hay 6 chicos y 11 chicas en el jardín. ¿Cuántas chicas hay más que chicos?"), se volvió a presentar de este modo : "Hay 6 chicos y 11 chicas en el jardin. ¿Cuántas chicas sobran para que haya el mismo número de chicos que de chicas?". Esta modificación dió lugar a un importante aumento en el porcentaje de respuestas correctas tal y como se expresa en la tabla y gráficos que ofrecemos seguidamente (tabla 6.1.1 y gráficos 6.1.8 y 6.1.9).

El problema **Comparación 2** ("Pedro tiene 7 libros de cuento. Jaime tiene 9 libros más que Pedro. ¿Cuántos libros de cuentos tiene Jaime?") se volvía a formular así : "Pedro tiene 7 libros de cuentos. Jaime tiene los de Pedro y 9 más. ¿Cuántos libros de cuentos tiene Jaime?". Comprobar en la mencionada tabla y gráficos el cambio que ocasionó en el porcentaje de éxito esta nueva expresión lingüística.

Por lo que se refiere al problema **Comparación 3** ("Luis ha pescado 16 peces. Luis ha pescado 9 peces más que Carla. ¿Cuántos peces ha pescado Carla?") se reformuló de esta forma : "Luis ha pescado 16 peces. Luis ha pescado el mismo número de peces que Carla y 9 más. ¿Cuántos peces ha pescado Carla?", y también de esta otra forma: "Luis y Carla, los dos han pescado peces. Luis ha pescado 16 y le dice a Carla: "Mira Carla, yo he pescado 9 más que tú"...". De esta forma aumentó también el número de niños que llegaron a la respuesta correcta como queda expresado en la siguiente tabla y gráficos.

Tabla 6.1.1: Porcentaje de respuestas correctas en los problemas comparativos con y sin explicación

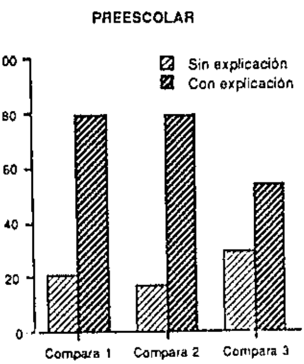
PREESCOLAR (problemas con números pequeños)

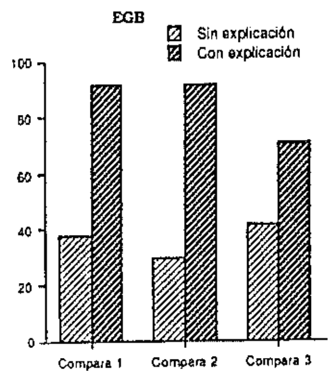
	Sin explicación	**Con explicación**
Comparación 1	5 (20,83%)	19 (79,17%)
Comparación 2	4 (16,67%)	19 (79,17%)
Comparación 3	7 (29,17%)	13 (54,17%)

EGB (problemas con números grandes)

Comparación 1	9 (37,5%)	22 (91,67%)
Comparación 2	7 (29,17%)	22 (91,67%)
Comparación 3	10 (41,67%)	17(70,83%)

Gráficos 6.1.8 y 6.1.9 : Representación del contraste del porcentaje de respuestas correctas en los problemas comparativos ,cuando se plantean con y sin explicación





En ambos grupos se observa la importancia que el contexto lingüístico tiene en el problema. Destaca también un ligero descenso en el porcentaje de niños que resuelven sin explicación el problema Comparación 2 y un aumento destacado en el problema Comparación 3. Estas variaciones sólo pueden entenderse teniendo en cuenta que han sido presentados uno a continuación del otro y en el orden indicado.

El problema Comparación 3 ha sido el más difícil de los tres, ya que llega a solucionarlo un menor porcentaje de niños cuando se plantea con explicación. A la dificultad en la comprensión del término comparativo se añade la presencia de señales lingüísticas conflictivas (es un problema de sustracción en el que se utiliza la expresión "más que"). Esto hace que la mejora en los resultados con la modificación del enunciado sea menor que en los otros dos problemas, pues si bien se omite el término comparativo, permanece la expresión aditiva, contraria a la operación correcta para hallar la solución.

Sin embargo, contrasta este resultado con el que obtenemos al comparar los porcentajes de éxito obtenidos en los tres problemas cuando se plantean sin modificar el enunciado. Encontramos en este caso un mayor número de niños que resuelven bien el problema Comparación 3, que sólo puede explicarse aludiendo a un proceso de aprendizaje mediado en la presentación sucesiva de los tres problemas. Algunos niños que necesitan al principio explicación para comprender el término comparativo, lo resuelven directamente sin ninguna aclaración adicional.

Por otra parte, en el problema Comparación 2 observamos un ligero descenso en el número de niños que encuentran la solución sin necesidad de explicación. Esto se debe a que algunos niños han aplicado el esquema aprendido en el problema Comparación 1 y buscan la diferencia entre las dos cantidades dadas, tratándose, sin embargo, de un problema de adición.

Esto nos indica la importancia de otra variable que en este trabajo no habíamos previsto, y es el **orden en que se presentan los distintos problemas**, ya que, como se ve, se aprecian fenómenos de interferencia y de aprendizaje que, en nuestra opinión son muy destacables.

En conjunto, los gráficos expresan la gran importancia que tiene el contexto lingüístico del problema en la determinación de su grado de dificultad. Algunos problemas, como los de Comparación, que son difíciles con las palabras habituales, se hacen mucho más fáciles cuando se cambia el enunciado de forma apropiada, poniendo de manifiesto, por tanto, la capacidad de los niños para realizar el razonamiento que conduce a su solución. Esto coincide, según hemos visto, con otros datos aportados por la literatura sobre este tema (Hudson, 1.980).

Podemos poner estos resultados en relación con los obtenidos en los estudios de réplica a la investigación piagetiana sobre inclusión de clases (Donaldson, 1.984, cap 4), en los que se concluye que si los niños no resuelven bien las tareas presentadas, se debe a un fallo en la comprensión y no en el razonamiento. Como en tales estudios, aquí argüimos contra la hipótesis de que el fallo en estos problemas se deba siempre a la falta de un esquema de acción para resolverlos. Si no lo hacen, se debe, en numerosas ocasiones, a que no llegan a comprenderlo de manera que pueda relacionarse con el esquema de acción ya disponible

Esto mismo ha sido puesto de manifiesto por algunos autores como Briars y Larkin, 1.984; Carpenter, Hiebert y Moser, 1.981; Carpenter y Moser, 1.983; De Corte, Verschaffel y De Win, 1.985; Hudson, 1.980; Lindvall e Ibarra, 1.980, Riley, Greeno y Heller, 1.983... con distintos tipos de problemas.

El trabajo de Hudson (1.980), al que hemos hecho referencia ya en el "Estado de la cuestión" (Cap.2), se centró precisamente en problemas comparativos : presentó de dos formas distintas a 12 niños de jardín de infancia, 24 preescolares y 28 de primer grado, un problema de Comparación semejante al de Comparación (1) incluido en nuestro estudio. Hudson mostró a los niños el dibujo de 5 pájaros y 4 gusanos y planteó dos cuestiones distintas con un intervalo temporal breve entre ellas : "¿Cuántos pájaros hay más que gusanos?", y luego "Supón que cada uno de estos pájaros trata de comer un gusano, ¿cuántos pájaros se quedarán sin gusano?". El problema fué significativamente más fácil cuando a los niños se les planteó esta segunda cuestión.

El modelo de Briars y Larkin 1.984), partiendo de la hipótesis de que la dificultad de los problemas de Comparación radica en que no describen al niño las acciones a realizar, analiza la resolución de problemas con señales de acción (como el ya mencionado de Hudson, 1.980 y dos de Carpenter, Hiebert y Moser 1.981) y la contrastan con la realización en otros problemas comparativos sin este tipo de señales

La mayor dificultad en estos últimos se debe a que exigen la interpretación de los términos lingüísticos "más que" y "menos que". Pero además, entre estos problemas sin señales de acción el modelo diferencia la ejecución en tres formas diferentes y cuya dificultad relativa interpreta como dependiente de sus requerimientos lingüísticos : problemas que contienen la expresión "¿Cuántos más (menos)?"(semejante a nuestro problema Comparación 1) y problemas que cuestionan acerca de una de las cantidades comparadas, bien incluyendo términos consistentes con la operación a realizar (como nuestro problema Comparación 2), bien conteniendo elementos lingüísticos conflictivos, (semejante al problema Comparación 3 de nuestro estudio). Mientras que el primero sólo exige que el niño reconozca estos términos como indicios para aplicar adecuadamente sus esquemas de establecer en correspondencia y de contar, los otros dos exigen, además, interpretar el lenguaje de relaciones estáticas entre conjuntos (inclusión de clases). La última condición con señales engañosas es la que introduce, evidentemente, mayor dificultad.

Diferencias similares han sido encontradas utilizando diferente vocabulario en otro tipo de problemas, como en los de Combinación con una parte desconocida (como el de Combinación 2) (Carpenter, Hiebert y Moser, 1.981; Lindvall e Ibarra (1.980)...).

En nuestro estudio, además de la constatación cuantitativa en los problemas de Comparación, se pone claramente de manifiesto la importancia del lenguaje utilizado en el enunciado, al analizar cualitativamente los errores que cometen inicialmente los niños en la resolución de determinados problemas. Se comprueba que, efectivamente, tales fallos desaparecen cuando los niños llegan a comprender la cuestión planteada. Por ejemplo, puede apreciarse en el problema Combinación 2 un mayor número de soluciones correctas cuando se añaden las expresiones "en total" ("Cecilia tiene 14 flores en total") y "de las cuales" ("de las cuales 8 son rojas"), es decir, desatacando las relaciones parte-todo implícitas en el problema. Del mismo modo, en Igualación 5 la ejecución mejora notablemente cuando cuando se omite la expresión condicional, que constituye un claro obstáculo para su comprensión (consultar el análisis de los errores cometidos en estos problemas, en la descripción que se incluye en el anexo nº 4).

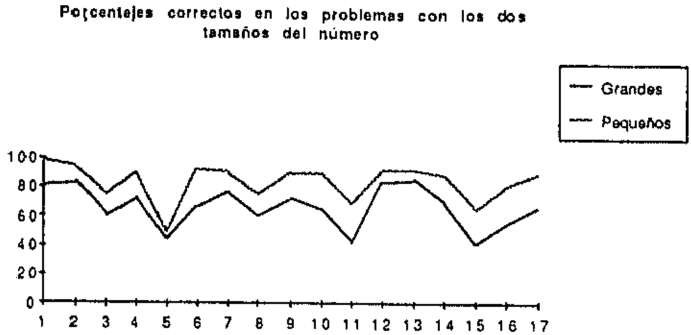
Nuestros datos se suman, por tanto, a los obtenidos por otros autores para poner en evidencia que la estructura semántica y la identificación de la incógnita en los problemas de adición y sustracción no determinan completamente la realización de los niños, sino que los cambios en el vocabulario ejercen una gran influencia en los niveles de dificultad y puede ser la variable responsable de numerosas discrepancias en las investigaciones realizadas sobre este tema. Esto nos obliga, como indican Carpenter y Moser (1.983), a ser precavidos sacando conclusiones acerca del procesamiento de los niños a partir de estudios específicos, sobre todo cuando el nivel de dificultad se usa como criterio de medida.

De todos modos, el hecho de que distintas versiones de problemas con la misma estructura semántica y la misma ubicación de la incógnita, den lugar a diferencias significativas en el nivel de realización de los niños, no contradice lo indicado más arriba acerca de la importancia estas variables.

Tamaño del número

El tamaño del número es otra variable que hemos encontrado fundamental en la explicación del éxito en los problemas. La curva que describen los porcentajes correctos en los diecisiete problemas planteados con números pequeños viene ser paralela a la formada con números grandes :

Gráfico 6.1.10



Así, el orden en dificultad se mantiene a pesar de los cambios en la magnitud del número. Cuando la reducimos, los problemas se hacen, simplemente, más fáciles.

A pesar de ello, la utilización de números pequeños modifica la clasificación realizada en niveles de dificultad, ya que en esta nueva condición los problemas se simplifican en gran medida y el efecto "techo" impide apreciar diferencias entre los mismos, tendiendo a igualarse los resultados en los valores altos

De este modo, los problemas que en la clasificación anterior ocupaban los niveles 1 y 2 y parte de los que se encontraban en el nivel 3, podemos ubicarlos en un mismo nivel de dificultad (nivel 1). Cabe matizar que el problema Cambio 1, ha resultado el más fácil, con diferencias significativas ($p < 0,05$) con todos los demás problemas excepto con Cambio 2. Asimismo, hay que aclarar que los resultados de los problemas de Comparación que consideramos aquí han sido con explicación, en todos los casos.

A continuación, hemos agrupado en un nivel intermedio de dificultad, dos de los problemas que con números grandes obtenían el mayor grado de dificultad (Comparación 3 e Igualación 4), junto con los problemas Cambio 3 y Combinación 2 que antes ocupaban el nivel 3. El problema Igualación 5 se sitúa entre este nivel y el anterior, ya que no presenta diferencias significativas con Cambio 3 y con Combinación 2, pero si ($p < 0,05$) con Comparación 3 e Igualación 4.

Por último, se destaca el problema Cambio 5 como el más difícil, con diferencias significativas (p.<.0,01) en porcentaje de respuestas correctas con todos los demás. Este problema ocupa, ahora aislamente, el nivel de mayor dificultad.

La nueva clasificación quedaría, por tanto, de este modo :

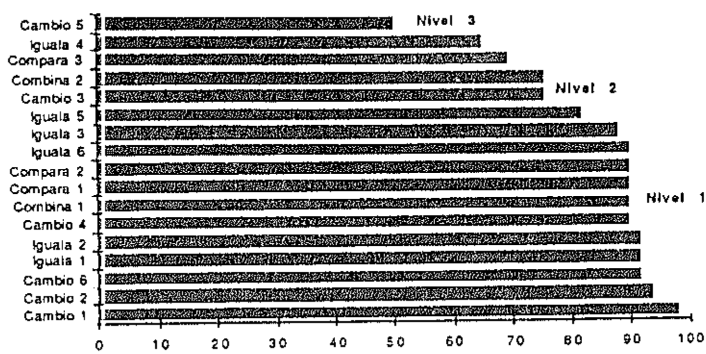
1.- Cambio 1- Cambio 2- Cambio 4- Cambio 6- Combinación 1- Comparación 1- Comparación 2- Igualación 1- Igualación 2- Igualación 3- Igualación 6.

2.- Cambio 3- Combinación 2- Comparación 3- Igualación 4.

3.- Cambio 5.

Reordenando los problemas según su dificultad relativa, obtenemos el siguiente gráfico :

Gráfico 6.1.11 : Niveles de dificultad de los problemas usando números pequeños



Como indicábamos antes, los datos hallados al reducir la magnitud de los números son congruentes con los recogidos con números grandes, encontrándose de igual modo, la influencia de la estructura semántica, el lugar de la incógnita y el contexto lingüístico en el grado de dificultad de los problemas.

Cuando los problemas se presentan con números pequeños, la proporción de respuestas correctas en cada uno de ellos, es significativamente mayor que cuando se aplican con números grandes. El menor cambio lo experimentan los problemas Cambio 2, Cambio 5, Igualación 1 e Igualación 2, en los que la diferencia marcada por el tamaño del número no alcanza el nivel de significatividad de $p \leq 0,01$, conseguido en el resto de los problemas.

En el caso de Cambio 2, Igualación 1 e Igualación 2 el escaso aumento relativo de respuestas correctas con la reducción del tamaño de los números, se debe a la facilidad de estos problemas, ya mostrada con números grandes. El problema Cambio 1, que comparte con estos problemas un mismo nivel de dificultad experimenta, sin embargo, un mayor cambio relativo, pasando a ser el más fácil de todos ellos. La única explicación que encontramos es que con números grandes resulta más difícil que los otros de su mismo nivel, debido a que exige saber contar hasta 14 en lugar de hasta 11 como es el caso de los demás. En los más pequeños este podría ser un dato importante que llegaría a influir en el total de la muestra.

El menor incremento de respuestas correctas con la disminución de la magnitud de los números, lo ha experimentado el problema Cambio 5. Este problema que, como se recordará, se encontraba en el nivel de mayor dificultad junto con los problemas Comparación 3 e Igualación 4, ahora se separa de ellos con una diferencia altamente significativa, pasando a ocupar sólo este lugar. Frente a esta escasa simplificación del problema Cambio 5, llama la atención la que tiene lugar en el problema Cambio 6, que compartiendo su misma estructura semántica y el mismo lugar de la incógnita, lo ubicamos ahora en el primer nivel de dificultad. De este modo, la diferencia (de momento inexplicable) que existía ya con números grandes se hace más notoria.

Si ahora tenemos en cuenta las puntuaciones totales obtenidas en los problemas en las dos presentaciones del número, nos encontramos con que la prueba t de Student pone en evidencia una diferencia entre las medias que es altamente significativa ($p = 0{,}0001$). Es decir, en el conjunto de la muestra se destaca claramente la influencia del tamaño de los números en el nivel de ejecución.

6.1.2. Variables relativas a los sujetos

La realización en los problemas ha sido diferente, como es lógico, en los distintos sujetos. Vamos a tratar de entresacar algunos factores relativos a éstos que influyen en las puntuaciones totales halladas. Concretamente nos centraremos en el curso escolar en el que se encuentran, en su nivel de rendimiento (tal y como es valorado por sus respectivos profesores y según las puntuaciones obtenidas en los problemas), en la etapa del desarrollo cognitivo, evaluado a través de las pruebas piagetianas, y en el grado de comprensión de las propiedades aritméticas.

Curso escolar

Se trata de una variable fundamental en la explicación de los resultados totales obtenidos en los problemas.

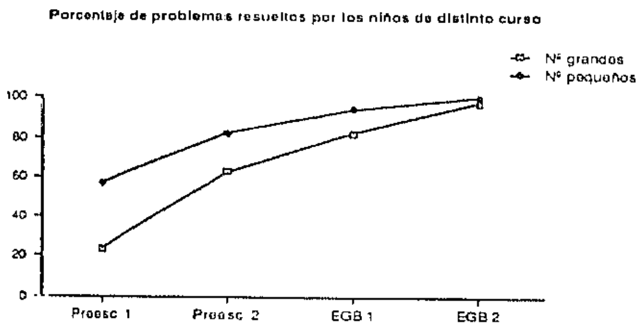
La prueba t de Student nos revela diferencias significativas entre los distintos cursos, así como entre el grupo de Preescolar y el de EGB tomados globalmente. En este último caso, la diferencia hallada es altamente significativa ($p=0{,}0001$), independientemente de cuál sea el tamaño de los números : tanto con números grandes como con números pequeños, los niños de EGB han mostrado un mayor dominio en estas tareas. Este resultado era de esperar ya que, en principio, se piensa que los sujetos mayores poseen una mayor capacidad de razonamiento, un mayor dominio de la numeración, así como un mayor entrenamiento en este tipo de actividades.

Analizando estas diferencias en cursos consecutivos, nos encontramos con que **la diferencia mayor está entre 1º y 2º de Preescolar y cuando se utilizan números grandes** (p=0,003); con números pequeños los resultados se aproximan (la diferencia, aun siendo también significativa, no alcanza el nivel de $p \leq 0{,}01$). Es decir, la diferencia entre estos dos cursos aumenta cuando lo hace la exigencia de la numeración. Los niños de 2º de Preescolar son más capaces de manejar números altos.

Entre 2º de Preescolar y 1º de EGB, así como entre 1º y 2º de EGB la diferencia alcanza también significatividad estadística pero al nivel de p=0,05.

A partir de los porcentajes de problemas resueltos correctamente por los distintos cursos, obtenemos un gráfico en el que se ve con claridad el efecto global de la variable curso.

Gráfico 6.1.12



La mayor diferencia se encuentra en el tránsito de 1º a 2º de Preescolar y cuando se utilizan números grandes.

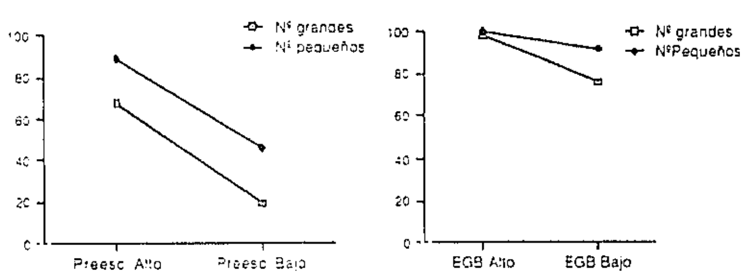
Nivel de rendimiento

Se ha revelado asimismo como una variable importante. La comparación de los grupos de rendimiento alto y bajo tanto en Preescolar como en EGB ha proporcionado diferencias altamente significativas en las puntuaciones totales obtenidas en los problemas, independientemente del tamaño del número.

Podemos añadir que los problemas más discriminativos para los preescolares han sido los que utilizan números pequeños, mientras que para los de EGB lo han constituido los que tienen números grandes. La explicación es clara : por una parte, la falta de dominio de la serie numérica es un factor de igualación en los más pequeños, ya que el desconocimiento de los números incluidos en el problema, es un requisito para su solución; por otra, los problemas con números pequeños, dada su gran facilidad para los niños de EGB, tienen menos capacidad para diferenciar a los alumnos de alto y bajo rendimiento. Podemos expresar esto contrastando en dos gráficos el porcentaje de problemas resueltos en los niveles alto y bajo de Preescolar y EGB :

Gráficos 6.1.13 y 6.1.14

Preescolar **EGB**

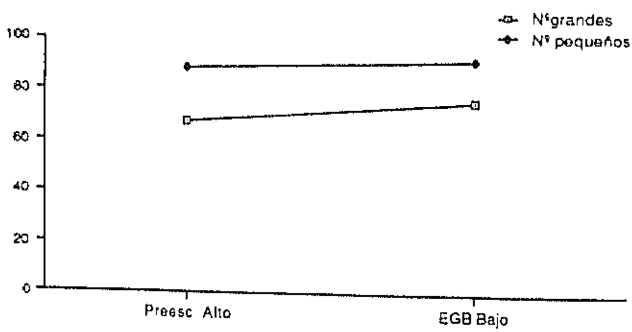


Considerando cada uno de los cursos por separado, hemos hallado que las diferencias entre los niveles de rendimiento son significativas en todos los cursos excepto en 2º de EGB, donde la mayor parte de los niños resuelven con éxito la totalidad de los problemas.

Cuando se comparan los **niveles alto de Preescolar y bajo de EGB** (basándonos en las valoraciones del profesorado), **no encontramos diferencias significativas en la media de las puntuaciones obtenidas en los problemas.** Es decir, aun cuando los grupos de Preescolar y EGB difieren en ellas de forma altamente significativa, tales diferencias desaparecen cuando para el contraste seleccionamos sólo a los preescolares de alto rendimiento y a los niños de EGB con bajo rendimiento. Esta igualación en el resultado cuantitativo no tiene por qué llevar consigo una equiparación en las estrategias utilizadas ni en el tipo de error cometido. Estos puntos serán objeto de un análisis posterior.

Gráfico 6.1.15

Porcentaje de problemas resueltos por los grupos alto de Preescolar y bajo de EGB

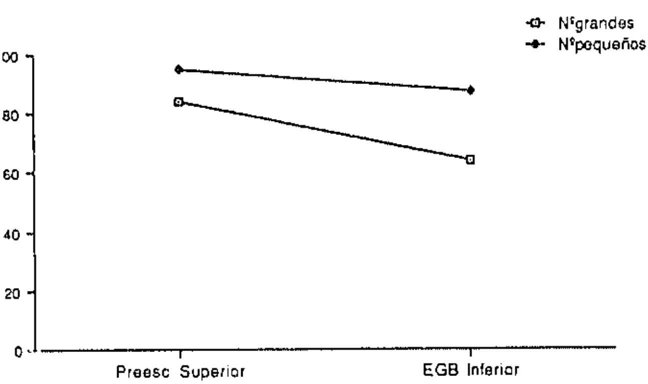


Pero lo más llamativo de estos contrastes es que eligiendo el 25% superior de Preescolar y el 25% inferior de EGB, en función de las puntuaciones alcanzadas (independientemente de las valoraciones que los profesores hacen del rendimiento), la **diferencia de medias resulta altamente significativa a favor de los más pequeños en los problemas con números grandes.** Hay que hacer notar que los profesores de preescolar indicaron que los niños sólo conocían hasta el cinco en 1º y hasta el 10 en 2º y los problemas superaban estas cifras.

Reduciendo el tamaño del número los resultados tienden a igualarse debido a que, aun cuando la realización de los preescolares aumenta,en general, los problemas se hacen excesivamente fáciles para los de EGB. No obstante, la diferencia sigue siendo favorable al grupo de Preescolar, aunque no alcance significatividad estadística.

Gráfico 6.1.16

Porcentaje de problemas resuelto por el 25% superior de Preescolar y el 25% inferior de EGB



Este hecho nos plantea una serie de cuestiones a las que trataremos de dar respuesta a lo largo del trabajo : ¿Cómo es posible que niños que no han recibido instrucción formal en adición y sustracción (en la encuesta afirman no saber todavía lo que es sumar y restar), superen a niños de 1º y 2º grado de escolaridad en la solución de problemas aritméticos?. ¿Cuáles son los requisitos para realizar este tipo de tareas?. ¿Qué estrategias siguen unos niños y otros para hallar la solución?. ¿Siguen procedimientos similares?. ¿Qué errores cometen?., es decir ¿dónde está la dificultad para los más pequeños y dónde se encuentra en los de EGB?. ¿Cuales pueden ser las causas de este fracaso en los niños de EGB de bajo rendimiento?. ¿Qué problemas concretamente han sido los más discriminativos?. Los de un grupo y otro ¿fallan en los mismos problemas?.

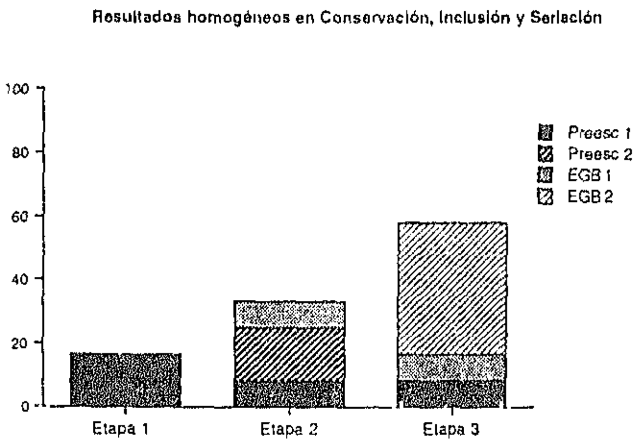
Etapa del desarrollo cognitivo

La etapa del desarrollo cognitivo en que se encuentran los niños se valora según los resultados en las tareas piagetianas de Conservación, Seriación e Inclusión de clases.

En un primer momento hemos de destacar el desfase encontrado en el desarrollo de las tres nociones estudiadas por Piaget. La mayor relación observada en la muestra global (y que llega a ser altamente significativa) es la que se aprecia entre los resultados obtenidos en las pruebas de Inclusión y Conservación. Sin embargo, cuando descendemos el análisis a cada curso en particular, dicha relación se desvanece.

Observando la distribución de los niños en las tres etapas, encontramos que sólo 13 de los 48 niños examinados (27%) han dado un resultado uniforme en las tres pruebas: 7 niños están en la etapa 3, 4 en la etapa 2 y 2 en la etapa 1. Su reparto en los distintos cursos queda expresado en el siguiente gráfico:

Gráfico 6.1.17



En 1º de Preescolar 4 niños (33,33%) han resuelto de forma homogénea las tareas: dos en la etapa 1, uno en la etapa 2 y otro en la etapa 3. En 2º de Preescolar sólo lo han hechodos niños (16,67%), y los dos se encuentran en la etapa 2. De 1º de EGB, son también dos alumnos, uno se halla en la etapa 2 y otro en la etapa 3. La mayor proporción de respuestas homogéneas la encontramos en 2º de EGB, con 5 niños en esa situación (41,67%) y todos ellos en la etapa 3.

Estos datos no se ajustan a la hipótesis fuerte de la homogeneidad mantenida por la teoría de Piaget, sino que más bien, viene a sumarse a las criticas que se le han hecho en este sentido sobre todo desde posturas neopiagetianas y del procesamiento de la información y se encuentran en la línea indicada por Flavell y Wohlwill (1.969), quienes sostienen que el estadio de las operaciones concretas puede ser considerado por una serie de estructuras cuyo desarrollo posee ritmos distintos aunque interdependientes.

Por otra parte, es preciso tener en cuenta que nuestro estudio se centra en una fase considerada por la Escuela de Ginebra como de transición en el desarrollo de las operaciones, por lo que no son de extrañar los desniveles hallados, ya que la teoría piagetiana utiliza las estructuras lógicas como caracterizaciones de las fases de completamiento, es decir, cuando el estadio está consolidado, y es ahí donde defiende la homogeneidad.

Los mencionados desfases nos obligan a estudiar separadamente la relación entre cada una de estas pruebas y las puntuaciones totales alcanzadas en los problemas.

Tomando como criterio de esta variable la Conservación del número, se aprecia su influencia, estadísticamente hablando, cuando tenemos en cuenta el total de la muestra, o el conjunto de EGB pero entonces, su efecto puede confundirse con otras variables relacionadas con la edad, dada su gran vinculación con ella (en todo Preescolar hay un sólo conservador, mientras que hay cinco en 1º de EGB y nueve en 2º). Esto nos lleva a analizar lo que ocurre en los distintos grados de escolaridad. En todo caso, la Conservación aparece más relacionada con las puntuaciones en los problemas con números grandes.

En Preescolar, no hemos podido valorar estadísticamente su importancia, ya que sólo hay un alumno conservador (Delia, de 1º curso).

La puntuación de esta niña en los problemas con números grandes ha sido de 14, frente a una media de 3,091 obtenida por el resto de los niños de 1º de Preescolar; con números pequeños ha resuelto la totalidad de los problemas cuando el promedio de los once restantes es de 9. Es notoria, por tanto, su superioridad con respecto a los demás de su propio curso.

Sin embargo, hay que tener en cuenta la gran variabilidad de las puntuaciones en los once no conservadores (s = 4,614 con nºgrandes y 5,06 con números pequeños). Así, cabe destacar entre éstos a Jorge, que consigue una puntuación de 15 en los problemas con el mayor tamaño del número y de 16 al reducir éste y a Clara, que no resuelve los problemas con números grandes porque no sabe contar por encima de 10, pero con números pequeños llega a resolver 15 problemas.

A esto es preciso añadir que en segundo de Preescolar ninguno de los niños ha alcanzado la etapa 3 de Conservación y, sin embargo, el nivel de realización en los problemas en algunos niños ha sido alto; el caso extremo lo tenemos en una niña (Ana), que ha conseguido la máxima puntuación en los problemas con números grandes. Las puntuaciones en este curso han sido asimismo muy heterogéneas (s = 4,295), con un máximo de 17, un mínimo de 0, y una media de 10,583. Disminuyendo el tamaño de los números, se reduce la dispersión de los resultados (s = 1,954), situándose el mínimo en 10 y el máximo en 17, con una media de 14 puntos.

En **1º de EGB** hay 5 niños conservadores frente a 7 que no lo son. **La diferencia entre un grupo y otro en la media de las puntuaciones totales no alcanzan significatividad estadística**, independientemente de cuál sea la magnitud de los números . Esto mismo ocurre en **2º de EGB**, donde 9 de los 12 niños son conservadores; con números grandes las medias son muy próximas (16,889 y 15,333 respectivamente) y con números pequeños idénticas ya que unos y otros alcanzan el máximo. Sin embargo, analizando más de cerca los datos nos encontramos que sólo hay tres niños de 2ºEGB que no han alcanzado la puntuación máxima en los problemas con números grandes y dos de ellos no conservan el número.

Parece ser que la importancia de la conservación del número **se aprecia únicamente en los casos extremos** y en los problemas con números grandes : en **Preescolar** sólo hay un conservador y éste obtiene muy buena puntuación en los problemas. Sin embargo, ya hemos señalado la existencia de casos destacables en Preescolar por su puntuación en los problemas y que no han llegado a la etapa 3 en la prueba de Conservación del número. Es decir en Preescolar podemos afirmar que **el que es conservador destaca en los problemas pero no a la inversa : los que destacan en los problemas no son necesariamente conservadores** (de hecho, en su mayoría no lo son). En **EGB los niños que obtienen las puntuaciones más bajas en los problemas no conservan el número** (a excepción hecha de César que, extrañamente, consigue en esta prueba la etapa 3 cuando en Inclusión de clases y en Seriación se encuentra en la etapa I), **pero hay niños con puntuaciones altas en los problemas con números grandes** (como Sergio y Sara de 1º y Fdo.Salvador de 2º), que **tampoco lo conservan.**

Estas consideraciones nos llevan a pensar que **la conservación del número no parece una condición necesaria para la solución de los problemas verbales.** Nuestro estudio viene a confirmar la hipótesis de que los niños que fallan en la tarea piagetiana de Conservación del número, pueden comprender y utilizar el conteo y, al menos, una aritmética informal. Tal resultado contradice la afirmación de Piaget (1.975) de que no es posible comprender el significado y la aritmética sin haber alcanzado la Conservación del número.

Nos encontramos, sin embargo, en la misma línea que Pennington, Wallach y Wallach (1.980), para quienes el significado de la tarea de Conservación en el desarrollo del pensamiento matemático parece haberse exagerado en gran medida. Aceptando que la noción de invarianza numérica pueda ser importante para la comprensión de la aritmética más elemental, lo que no está en absoluto claro es que fallar en la tarea de Conservación del número -incluso en las condiciones más favorables-indique necesariamente que el niño no espera que el número permanezca cuando los objetos se ordenan de otro modo. Hemos indicado ya que una serie de investigadores (Bryant, 1.974; Gelman (1.972; Gelman y Gallistel, 1.978; Lawson, Baron y Siegel, 1.974; McGarrigle y Donaldson, 1.974, Miller, Heldmeyer y Miller, 1.978...) ha encontrado que niños muy pequeños muestran un reconocimiento de la invarianza numérica en determinadas situaciones, concretamente cuando está claro para ellos cuál es la cuestión que se les plantea y cuando no hay señales perceptivas conflictivas.

Si esto es así, si los no conservadores esperan que el número permanezca invariable aunque no lo pongan de manifiesto en la tarea piagetiana -debido a la presencia de señales conflictivas o a que no saben muy bien qué es lo que se les pregunta- entonces no tienen por qué encontrar dificultades en las tareas de tipo aritmético como las presentadas en nuestro estudio.

Esto es, precisamente, lo que hemos hallado en este estudio, confirmándose los resultados de otros muchos, a los que hemos aludido en el "Estado de la cuestión" (cap.2), como los de Gelman y Gallistel (1.978), quienes destacan la comprensión de varios aspectos del número por preescolares que no conservan, o los de Mpiangu y Gentile (1.975) que sugieren que los no conservadores un poco más mayores pueden aprovecharse tanto como los conservadores de la instrucción en aritmética.

Queda por analizar la relación que existe entre los resultados obtenidos en la prueba piagetiana y cada uno de los problemas por separado, así como la que pudiera haber con la utilización de determinado tipo de estrategias. Quizá esta noción tenga un mayor peso en determinado tipo de problemas y tal vez, la conservación lleve pareja la utilización de determinadas estrategias o la ausencia de ciertos errores. Un tema y otro se abordarán en otro momento.

En **Preescolar**, la única prueba piagetiana que resulta estadísticamente influyente en las puntuaciones de los problemas ha sido la de **Seriación**. Los 6 niños que consiguen la etapa 3 obtienen una media de 11,33 (frente a la de 5,94 alcanzada por los que no dominan tal concepto) con números grandes y de 15,167 al disminuir el tamaño de éstos (en contraste con la de 10,722). La variabilidad de las puntuaciones de los niños de las etapas 1 y 2, ha sido muy amplia en los problemas con números pequeños (s = 4,66), de modo que en este caso las diferencias con respecto a los de la etapa 3 no llegan a ser significativas.

El peso de esta variable lo da **1º de Preescolar** donde los tres niños que se encuentran en la etapa madura han sido los tres mejores en la realización de los problemas (Delia, Jorge y Clara). Las diferencias entre las medias de estos tres niños y las del resto de sus compañeros son altamente significativas en las dos magnitudes del número. En **2º** hemos encontrado, sin embargo, niños buenos en los problemas y que todavía se encuentran en un periodo de transición, como son los casos de Ana, Miguel, Sergio, Eduardo... que obtienen puntuaciones iguales o superiores a las alcanzadas por los que resuelven de una forma sistemática y segura la tarea de Seriación.

Los resultados en esta prueba piagetiana están relacionados también con el número de problemas de números grandes que resuelven los alumnos de **EGB** estudiados. Los 11 niños que se encuentran en la etapa 3 alcanzan una media (16,727) significativamente mayor a la conseguida por los 13 restantes (14); en estos últimos los resultados son mucho más heterogéneos, habiendo niños con puntuación máxima (Sergio y María, de 1º y Julia y José Antonio, de 2º). Ninguno de los alumnos con puntuaciones bajas han llegado a la madurez en la realización de esta prueba. Cuando consideramos aisladamente los cursos de 1º y 2º de EGB, no se aprecia la importancia de esta variable: la diferencia de medias, aunque, naturalmente, expresa una superioridad en los que han conseguido la noción piagetiana, no es estadísticamente significativa.

Con respecto a la Seriación caben los mismos comentarios hechos acerca de la Conservación : **No se ha mostrado necesario alcanzar la etapa de madurez para resolver con corrección los problemas aritméticos presentados, ni siquiera para obtener en éstos la puntuación máxima.** No obstante, se puede afirmar que los niños con peor calificación en los problemas no dan muestras de haber adquirido esta noción, aunque tampoco lo hayan hecho algunos de puntuación alta. La relación más estrecha se observa con los problemas con números grandes.

También en este caso, dejamos el estudio de su relación con cada uno de los problemas por separado, para más adelante.

Por último, por lo que se refiere a la prueba de **Inclusión de clases**, de los 15 niños que dominan ya esta noción, 10 cursan 2º de EGB, 4 son preescolares (2 de 1º y 2 de 2º) y 1 está en 1º de EGB. No parece adecuado tener en cuenta los cálculos de diferencia de medias hallados en el conjunto de la muestra : la significatividad hallada indica no sólo el efecto de los resultados en inclusión de clases sino también del curso con todos los factores que conlleva. Pero, por otra parte, cuando tratamos de realizar los cálculos en el interior de cada curso, nos encontramos con que la escasez de las muestras comparadas introduce los sesgos de los casos extremos

Así de los dos niños de 2º de EGB que no han alcanzado la etapa más avanzada, cabe destacar el caso de Angel, que obtiene una puntuación de 13 en los problemas con números grandes cuando la media del curso es de 16,5. Se trata de un caso extremo, que se descuelga de todos los demás y que hace que se encuentre significativa la diferencia de medias entre los que resuelven y no resuelven la prueba de Inclusión, cuando el otro caso hallado alcanza la puntuación máxima.

En 1º de EGB, el único niño que dá muestras de poseer el concepto de Inclusión es un alumno de alto rendimiento en opinión de su profesor y que en los problemas con números grandes alcanza los 17 puntos. Sin embargo, otros tres niños llegan a esta misma puntuación (Sergio, María y Sara) sin dominar tal concepto. Puede ser de todos modos que la diferencia entre el primer caso y estos tres no se encuentre en el aspecto cuantitativo sino cualitativo, pero esto será objeto de un análisis posterior.

En 1º de Preescolar, las dos niñas (Delia y Ana) que resuelven de forma madura la tarea han sido valoradas de rendimiento alto por sus respectivos profesores y han obtenido una media de 10,5 frente a la de 2,7 conseguida por el resto de compañeros. Sin embargo, la variabilidad de los dos grupos comparados ha sido muy elevada de modo que entre los que no han adquirido la inclusión de clases, hay puntuaciones superiores a la obtenida por una de las niñas que dan muestra de su dominio (Ana). La otra niña, Delia, se ha revelado, como ya hemos tenido ocasión de comentar, claramente superior a la media de su grupo, pero también hay un niño de 1º de Preescolar que ha conseguido resultados similares en los problemas sin llegar a resolver bien esta tarea piagetiana.

En 2º de Preescolar, los resultados de las dos niñas que tienen el concepto de inclusión de clases, son muy próximos a la media de su curso, de modo que muchos niños con puntuaciones muy parecidas o incluso superiores (como es el caso de Ana, ya nombrado) no dan muestras de poseer todavía la noción piagetiana.

Es decir, en Preescolar y en 1º de EGB los que resuelven bien la tarea obtienen buenos resultados en los problemas pero otros niños con resultados similares se encuentran todavía en la etapas 1 o 2. En 2º de EGB el alumno con puntuación más baja no posee la noción de Inclusión de clases pero tampoco, uno de los niños que (como la mayoría de los de su curso), ha obtenido la puntuación máxima. Por todo ello aquí también parece que **el haber alcanzado la noción de Inclusión no es condición necesaria para obtener una buena puntuación en los problemas.** Y, por otra parte, igual que en las demás tareas piagetinas, **tampoco aquí los peores alumnos en problemas dan muestras de haber alcanzado este concepto.**

Como indicábamos anteriormente, quizá **la diferencia entre unos niños y otros radique fundamentalmente en los aspectos cualitativos de la tarea (procedimientos empleados y tipos de error cometidos)** en lugar de basarse en las puntuaciones totales obtenidas en los problemas. Este tema será abordado en la siguiente sección.

La relación entre las dos variables aquí estudiadas (etapa cognitiva y resultado en los problemas aritméticos) se ve claramente en los dos cursos extremos : 1º de Preescolar y 2º de EGB. Los de 1º de Preescolar son demasiado pequeños para realizar bien los problemas y los que obtienen buena puntuación se muestran, además, avanzados en su desarrollo cognitivo (consiguen la etapa 3 al menos en una de las pruebas de Piaget.). Para los de 2º de EGB los problemas planteados son demasiado fáciles y sólo tiene dificultad en su realización el niño que, además, no muestra haber conseguido la etapa 3 en ninguna de las pruebas mencionadas.

Nivel de comprensión de las propiedades básicas de la aritmética.

Las tareas destinadas a valorar la comprensión infantil de la inferencia de la operación realizada, inversión, compensación, asociatividad y conmutatividad, han sido muy **heterogéneas en su nivel de dificultad.** La más sencilla en todos los cursos ha sido la que evalúa la inferencia: la ha resuelto de forma madura una tercera parte de los niños de 1º de Preescolar (todavía hay muchos que dan una valoración cualitativa) y a partir de este curso asciende bruscamente el porcentaje de niños que alcanzan la etapa 3 (consultar tabla 5.1.14). El resultado de la alta proporción de respuestas cualitativas en esta prueba, cuando examinamos a los más pequeños, es coincidente con otros datos aportados por la literatura sobre el tema (Starkey y Gelman, 1.982). La tarea sobre la asociatividad ha resultado ser la más difícil en todos los cursos: ningún preescolar llega a la etapa 3 y sólo lo hace la tercera parte de los alumnos de EGB (tabla 5.1.11). En una situación intermedia se encuentran las de conmutatividad (tabla 5.1.10), inversión (tabla 5.1.12) y compensación (tabla 5.1.13), siendo la primera de ellas algo más fácil que estas dos últimas. En las tareas de inversión y compensación, la mayor parte de los preescolares dan respuestas "cualitativas" (etapa 2), es decir, tienen en cuenta el tipo de transformaciones pero ignoran la cuantía de las mismas, lo que coincide con el estudio de Cooper (1.978, citado en Starkey y Gelman, 1.982). Los datos sugieren que en estas dos últimas tareas está implicado un mismo proceso, confirmándose de nuevo los resultados de los autores mencionados (Starkey y Gelman, 1.982).

Al estudiar, en la muestra global, la relación entre estos principios subyacentes de la adición y sustracción y las nociones piagetianas, hemos encontrado que las relaciones más elevadas se dan entre los de **Asociatividad** y **Conmutatividad** con los conceptos de **Conservación del número** e **Inclusión de clases.** En Preescolar no se alcanza significatividad estadística en ningún caso, aun cuando se aprecia una relación entre la prueba de Conservación con las de Inversión y Compensación, por una parte, y la prueba de Inclusión con las de Asociatividad y Conmutatividad, por otra (sin tener en cuenta la corrección de continuidad, ji-cuadrado llega a ser significativa). En EGB se destaca una relación significativa entre Conservación y Asociatividad -

las dos son tareas diseñadas por Piaget y presentan una evidente semejanza- (C=0,477, equivalente a r=0,821), por un lado, e Inclusión y Conmutatividad (C=0,427, equivalente a r=0,777), por otro. La relación significativa entre Inclusión y Conmutatividad, puesta de manifiesto tanto en el conjunto de la muestra como en el grupo de EGB, viene a apoyar la idea de Riley, Greeno y Heller (1.983) de que la propiedad conmutativa corresponde a una "comprensión implícita de las relaciones parte-todo entre los sumandos a y b y su suma c" (pag.185). Sin embargo, en nuestro trabajo, la prueba de Inclusión ha resultado más difícil que la de Conmutatividad, de modo que en EGB la totalidad de los niños que resuelven la primera, resuelven también la segunda, mientras que 8 niños (la tercera parte del grupo), dan muestras de comprender la propiedad conmutativa, habiendo fallado en la tarea de Inclusión. En Preescolar tan sólo encontramos una niña que resolviendo la tarea de Inclusión, tiene que contar cada vez que invertimos el orden de los sumandos; sin embargo, hallamos 4 niños (16,67%) que muestran comprender la conmutatividad sin ser capaces de resolver la tarea de Inclusión (las tablas de Contingencia están incluidas en el anexo A.3.3). Estos datos indican de forma clara que, a pesar de observarse tal relación, **no es necesario haber llegado a la etapa 3 en Inclusión para comprender la Conmutatividad**, lo que, en nuestra opinión, no invalida la hipótesis de Riley y otros. Pensamos que en ambas tareas está implícita la comprensión de las relaciones parte-todo, pero la de Inclusión es más exigente porque el niño tiene que sobreponerse a factores perceptivos engañosos.

Ahora bien, ¿la comprensión de las propiedades básicas de la aritmética, tal y como se valoran a través de las pruebas utilizadas en este trabajo, influyen en los resultados obtenidos en los problemas?

Teniendo en cuenta el conjunto de la muestra, se observa que los niños que han alcanzado la etapa 3, en cada una de las propiedades aritméticas, obtienen, como grupo, una puntuación total media en los problemas, significativamente más elevada que los que se hallan todavía en etapas anteriores. En todos los casos la diferencia ha sido más marcada al considerar los resultados en los problemas con números grandes. No obstante, se observa que, a medida que avanzamos en escolaridad, aumenta la proporción de alumnos que se sitúa en la etapa

3 en la comprensión de las distintas propiedades y, al mismo tiempo, se eleva la media obtenida en el grupo. Por ello, las diferencias de medias halladas en la resolución de problemas pueden estar influidas por variables unidas al grado escolar y distintas del nivel de comprensión de los principios aritméticos. Para intentar neutralizarlas, se hace preciso un análisis a nivel de curso (o al menos de ciclo escolar):

En **Preescolar**, el haber alcanzado o no la etapa 3 en la tarea de **Inferencia de la operación**, marca diferencias altamente significativas en las puntuaciones totales obtenidas en los problemas en los dos tamaños del número ($p=0,0001$). Los 10 niños que todavía dan respuestas cualitativas (8 son de 1º y 2 de 2º) obtienen como media en los problemas con números grandes 1,9 y en los problemas con números pequeños 7,8, mientras que los 14 que se sitúan en la etapa 3 las medias son, respectivamente, 11,143 y 14,643. Es decir, **la capacidad de dar respuestas cuantitativas en la tarea de Inferencia constituye un paso decisivo para la resolución de problemas y este paso tiene lugar en el tránsito de 1º a 2º de Preescolar.** Pero, al mismo tiempo, tal capacidad no constituye un requisito para obtener una buena puntuación en los problemas con números pequeños.

La comprensión de la **propiedad conmutativa influye asimismo, en Preescolar, de forma significativa en la resolución de problemas**. Los 7 alumnos que manifiestan tal comprensión obtienen unas medias en las puntuaciones totales superiores a las obtenidas por los 17 niños que todavía se hallan en etapas previas. La t de Student arroja diferencias significativas tanto cuando se utilizan números grandes ($p=0,008$), como cuando se utilizan números pequeños ($p=0,0307$). Sin embargo, el mostrar la comprensión de esta propiedad no constituye un requisito para obtener una puntuación elevada en los problemas con números pequeños e incluso con números grandes (véanse, por ejemplo, los resultados de Jorge, de 1º de Preescolar, y de Ricardo, Sandra y Eduardo Mnez. de 2º, que si bien no alcanzan la puntuación máxima, obtienen muy buen resultado). Es decir, **para resolver problemas con números grandes parece imprescindible haber alcanzado la etapa 3 en la tarea de Inferencia, pero no en la de Conmutatividad.**

Las tareas de Asociatividad, Inversión y Compensación son todavía muy difíciles para los pequeños (sólo un niño resuelve de forma madura la de Asociatividad y cuatro las de Inversión y Compensación). En todo caso, el grupo de niños que se encuentra en la etapa 3 obtiene medias muy superiores a las del grupo de niños que no la han alcanzado, pero la t de Student sólo indica significatividad estadística cuando tomamos como variable independiente los resultados en **Compensación** y se utilizan **números grandes** en los problemas (p=0,0162).

En **EGB** la comprensión de todos y cada uno de los principios aritméticos estudiados aquí, se ha mostrado como algo muy influyente en la puntuación total obtenida en la resolución de problemas con números grandes. En todos los casos, excepto en el de Asociatividad, la diferencia entre los que se encuentran en la etapa 3 y los que no han llegado a ella, ha sido altamente significativa ($p \leq 0{,}01$). Cuando en los problemas se utilizan números pequeños las diferencias siempre han sido menores, pero también significativas excepto en el caso de Asociatividad. Esta prueba todavía ha resultado difícil en EGB: sólo alcanza la etapa 3, 1/3 de los niños de 1º y 1/3 de los de 2º, sin que esto se haya mostrado como requisito para obtener la puntuación máxima incluso en los problemas con números grandes (compruébense las fichas de Fernando L., Fernando Salvador, Daniel, Carolina, todos ellos de 2º de EGB).

Sin embargo, en la tarea de **Inferencia**, tan sólo hallamos dos niños que dan respuestas cualitativas (César y Gabriel), los dos son del nivel bajo de 1º de EGB y los dos han obtenido puntuaciones muy bajas en la resolución de problemas (X=9,5 cuando se utilizan números grandes y X=13,5 con números pequeños) si los comparamos con los niños de su mismo curso que se encuentran en la etapa 3 (X=15,777 y X=16,777, respectivamente). La t de Student indica diferencias altamente significativas (p=0,0003 con números grandes y p=0,0001 con números pequeños).

En la prueba de **Conmutatividad** tan sólo encontramos un alumno de 2º de EGB y cuatro de 1º, que tienen que hacer la operación cada vez que modificamos el orden de los sumandos, para dar el resultado. Los cinco alumnos han sido valorados por su profesor como de rendimiento bajo y han obtenido una **puntuación muy baja en los problemas con números grandes** en relación con sus compañeros (X=10,8 frente a 16,421); con números pequeños los cuatro niños de 1º todavía fallan en varios problemas (X=14,8, frente a 16,947). La prueba t arroja diferencias altamente significativas en ambos casos (p=0,0001).

En **Inversión** y en **Compensación** aproximadamente la mitad de los niños responden de forma madura. A pesar de su superioridad en la resolución de problemas (más acusada cuando utilizamos números grandes), encontramos que **el alcanzar la etapa 3 en estas tareas no es imprescindible para conseguir la puntuación máxima en los problemas con números grandes** (pueden consultarse las fichas de Carolina y de Javier, ambos de 2º de EGB).

Con todo ello, se aprecia que, en general, **las propiedades de la aritmética cuya comprensión se muestra como necesaria para alcanzar la puntuación más elevada en los problemas con números grandes, son las de Inferencia y Conmutatividad:** Todos los niños que han obtenido la puntuación máxima se encuentran en la etapa 3, pero lo contrario no es cierto, es decir, el hecho de haber llegado a la misma no supone resolver la totalidad de los problemas con números grandes. Dicho de otro modo, el conseguir la etapa 3 en Inferencia y en Conmutatividad constituye una condición necesaria aunque no suficiente.

Dejamos para otro momento el análisis de la relación entre la solución de cada tipo particular de problema y la comprensión de cada uno de estos principios básicos de la aritmética, lo que nos aportará una información mucho más matizada acerca del conocimiento conceptual implicado en su resolución.

6.1.3. Interacción de las variables relativas a los problemas y a los sujetos.

Hemos visto los niveles de dificultad de los distintos problemas a partir de los resultados obtenidos en la muestra total y hemos comprobado que dependen de una serie de factores como son su estructura semántica, el lugar que ocupa la incógnita, el contexto lingüístico y el tamaño del número. Asimismo ha quedado confirmada la influencia de variables propias del sujeto como el curso/edad, el nivel de rendimiento, la etapa cognitiva y el grado de comprensión de las propiedades de la aritmética, en la realización de los problemas.

En este momento tratamos de averiguar el nivel de dificultad de cada uno de los problemas por separado, en niños que reunen distintas características, con el objeto de analizar si los factores que distinguen unos problemas de otros, afectan por igual a la ejecución de todos los niños o lo hacen de una forma diferencial, según sea el curso, nivel de rendimiento o etapa cognitiva en la que éstos se hallen.

Nos detendremos sucesivamente en el análisis de la interacción de cada una de tales características propias del sujeto y todas aquéllas que hacen relación a los problemas.

Interacción entre la variable curso y los distintos tipos de problemas

Por lo que se refiere a la variable curso, analizaremos, en primer lugar, en qué problemas **difieren significativamente** los niños de un curso y otro basándonos en los datos obtenidos a partir de la aplicación de ji-cuadrado y de la prueba p de Fisher. De este modo, pretendemos averiguar cuáles son los principales progresos que tienen lugar en la resolución de problemas, con el paso de un curso a otro más avanzado.

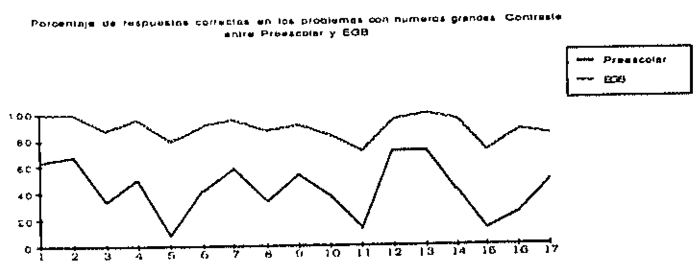
A continuación, haremos una clasificación de los problemas en función del **curso en el que consiguen un 75% de respuestas correctas**, considerando que este porcentaje representa ya un dominio de los mismos.

Para finalizar este apartado, intentaremos clasificar los problemas en distintos **niveles de dificultad** para los distintos grados escolares. Dado lo exiguo de la muestra, los cálculos estadísticos para averiguar la significatividad de las diferencias entre proporciones de respuestas correctas (utilizando la prueba de MacNemar), los hemos realizado en el grupo de Preescolar y de EGB, sin tener en cuenta separadamente cada uno de los cursos. De todos modos matizaremos la clasificación realizada con observaciones más detalladas acerca de lo que ocurre en los mismos

Progresos realizados en la resolución de problemas conforme avanzamos en cursos escolares

Al comparar globalmente los grupos de **EGB** y de **Preescolar**, el **mayor contraste** lo hallamos en los **problemas con números grandes**, poniéndose de manifiesto de forma clara la dificultad de los preescolares en el manejo de estos números. En el único de los problemas donde no se aprecia diferencia significativa es en Igualación 1, que como veremos, gran parte de los niños resuelven de forma intuitiva y no exige el conocimiento de números por encima del 8. En el siguiente gráfico puede apreciarse el contraste en el porcentaje de respuestas correctas entre Preescolar y EGB en los problemas con números grandes:

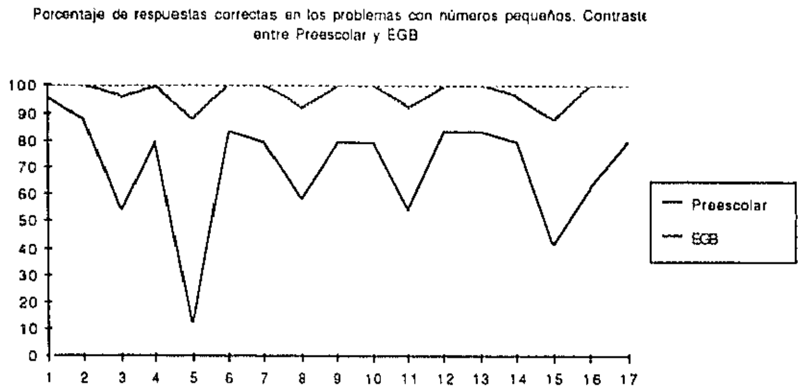
Gráfico 6.1.17



El mayor contraste se encuentra en 3 (Cambio 3), 5 (Cambio 5), 8 (Combinación 2), 11 (Comparación 3) y en 15 (Igualación 4), donde las diferencias halladas entre un ciclo escolar y otro son estadísticamente significativas. Los resultados se aproximan ante todo en 12 (Igualación 1).

Con **números pequeños**, las **diferencias significativas** se limitan a seis de los 17 problemas planteados: **Cambio 3, Cambio 5, Combinación 2, Comparación 3, Igualación 4 e Igualación 5**, lo que queda expresado en el siguiente gráfico.

Gráfico 6.1.18



Con números pequeños los contrastes más acusados coinciden con los indicados en el caso de los problemas con números grandes: Cambio 3 (3), Cambio 5 (5), Combinación 2 (8), Comparación 3 (11) e Igualación 4 (15). Las diferencias estadísticamente significativas en este tamaño del número se limitran a estos problemas.

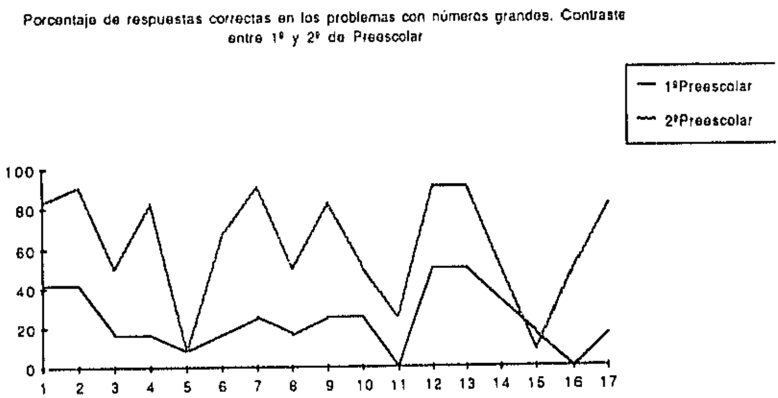
Ya hemos comentado, a partir de los resultados obtenidos en el conjunto de la muestra, la gran dificultad que plantean a los niños estos problemas independientemente de cuál sea el tamaño de los números. Cuando realizamos el análisis en Preescolar y en EGB, por separado, resultan también ser los más difíciles. El paso de un ciclo escolar a otro supone un avance importante en la solución de los mismos, en los que todavía hay niños, incluso de 2º de EGB, que cometen fallos al elevar el tamaño del número.

Examinando lo que ocurre **entre los dos cursos de Preescolar**, nos encontramos que las **diferencias** son también más marcadas y abarcan a mayor número de problemas cuando se utilizan **números grandes**

Parece ser que el paso de 1º a 2º de Preescolar supone un **progreso importante en el conteo** : podemos decir que, en general, en este último curso los niños ya conocen los números superiores a nueve, lo que constituye un requisito para resolver los problemas planteados con el tamaño mayor del número.

A pesar de este mayor dominio de la numeración en 2º de Preescolar, **no se aprecia un avance significativo en los problemas que resultaron más difíciles al conjunto de la muestra.** Este resultado no es de extrañar, dado que tales problemas exigen, según los modelos teóricos estudiados (Briars y Larkin, 1.984; Riley, Greeno y Heller, 1.983), una representación mental anticipada de la situación del problema. El conocimiento de los números que deben manejarse en el problema es una condición necesaria para resolverlo, pero, evidentemente, no suficiente. Veamos expresado lo que acabamos de indicar mediante un gráfico:

Gráfico 6.1.19

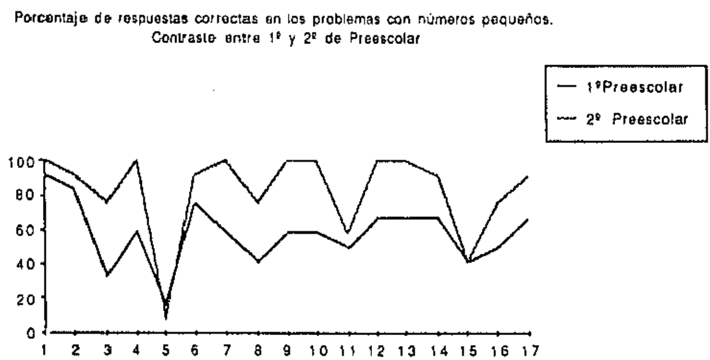


En los tres problemas más difíciles : 5 (Cambio 5), 11 (Comparación 3) y 15 (Igualación 4), los resultados son muy semejantes en uno y otro curso de Preescolar. Se aprecia, sin embargo, un gran avance en el resto de los problemas cuando se plantean con números grandes.

Los problemas Cambio 5 e Igualación 4 resultan igualmente difíciles a los niños de uno y otro curso (sea cual sea la magnitud del número); Sin embargo, tanto en Cambio 3 (3), Combinación 2 (8) e Igualación 5 (16), se observa una progresión clara al pasar a 2º, pero que sólo llega a ser significativa en el caso de **Igualación 5** con números grandes : ninguno de los niños de 1º resuelve este problema, cuando un 50% de los de 2º lo hace correctamente Sin embargo, reduciendo el tamaño del número, la mitad de los niños de 1º de Preescolar llega a resolverlo. Quizá el análisis de estrategias en los distintos cursos nos ayude a dilucidar el gran problema que ha supuesto para los de 1º de Preescolar con números grandes y su simplificación con números pequeños. Podría ser que en este último caso fuera posible resolverlo de una forma intuitiva, captando de forma inmediata el resultado.

De todos modos, dado que sólo dos niños de 1º de Preescolar (Delia y Jorge) han mostrado un conocimiento de los números superiores al 9, parece que para apreciar la influencia de la estructura semántica en la realización de los niños de uno y otro curso, sea más adecuado realizar los contrastes a partir de los datos obtenidos en los problemas con números pequeños, expresados en el siguiente gráfico:

Gráfico 6.1.20



Los resultados en los problemas más difíciles siguen siendo muy próximos en ambos cursos de Preescolar Cambio 5 (5), Comparación 3 (11) e Igualación 4 (15). .

En este tamaño del número, las diferencias significativas se limitan a los problemas **Cambio 4** (4) **Combinación 1** (7) y **Comparación 2 (con explicación)** (10). Con números pequeños, todos los niños de 2º de Preescolar resuelven los tres problemas mencionados, frente a un 58% de los de 1º. Podemos decir, por tanto, que **el obstáculo que los niños más pequeños encuentran en estos problemas queda superado en 2º de Preescolar**, al menos cuando pueden utilizar ayudas manipulativas.

Como se recordará, el problema **Cambio 4** es un problema de sustracción en el que se desconoce la magnitud del cambio La sentencia numérica que subyace al mismo es : (6 - ? = 4) Para Briars y Larkin (1.984) la comprensión de la equivalencia de subconjuntos podría ser algo definitivo para su solución correcta, ya que permitiría al niño transformar tal sentencia en otra más sencilla (6 - 4 = ?). No obstante, la solución de este problema utilizando material manipulativo -tal y como tiene lugar en nuestro estudio- no parece exigir tal conocimiento previo, sino que puede ser modelado directamente con contadores de un sólo rol.

No parece que la simplificación observada en este problema cuando el niño pasa a 2º de Preescolar, pueda explicarse por la adquisición de la equivalencia de subconjuntos, al menos cuando ésta se valora a través de la prueba piagetiana de Inclusión. Los niños de 2º de Preescolar no han puesto de manifiesto, en su mayoría, tal comprensión (recordemos que sólo 2 niños de 2º de Preescolar resuelven de forma madura la prueba de Inclusión de clases).

Disponiendo de ayudas manipulativas, un 58,33% de los niños de 1º de Preescolar y el total de los de 2º lo resuelvan correctamente si se utilizan números pequeños. Este último resultado está de acuerdo, además, con el modelo de Riley, Greeno y Heller (1.983), que sitúa este problema en el nivel más elemental de los problemas de Cambio, junto con los de Cambio 1 y Cambio 2. Para los de 1º, sin embargo, el problema Cambio 4 es algo más complejo que éstos y la razón podría estar, al menos en parte, en el contexto lingüístico (la palabra "algunos" resulta más fácil de comprender para los de 2º).

El problema **Combinación 1**, como hemos visto, resulta muy fácil al conjunto de los niños, siendo los resultados muy similares, tanto en porcentaje de corrección como, ya lo veremos después, en estrategias utilizadas, a los obtenidos en el problema Cambio 1., lo que está de acuerdo con otros datos consultados (Carpenter Hiebert y Moser, 1.981, Carpenter y Moser, 1.982,; Ibarra y Lindvall, 1.979; Riley, Greeno y Heller, 1.983; Steffe y Johnson, 1.971; Underhill y Shores, 1.976). Cuando examinamos los resultados de cada uno de los cursos, nos encontramos con una excepción en **1º de Preescolar**. Para los niños de este curso, el problema Combinación 1 es **más difícil que Cambio 1**; la diferencia en proporciones de respuestas correctas alcanza significatividad estadística cuando se emplean números pequeños. Este resultado podría indicarnos que, al comienzo, el concepto dinámico de la suma como operación unitaria (en la base del problema Cambio 1), es más sencillo que la noción estática que la considera como operación binaria (implicada en el problema Combinación 1) (Maza, 1.989). **Los problemas con señales claras de acción son, en principio, más fáciles que los que describen relaciones estáticas**, seguramente, como afirma Baroody (1.988), porque se ajustan mejor a la comprensión que los niños tienen de la adición como proceso aumentativo.

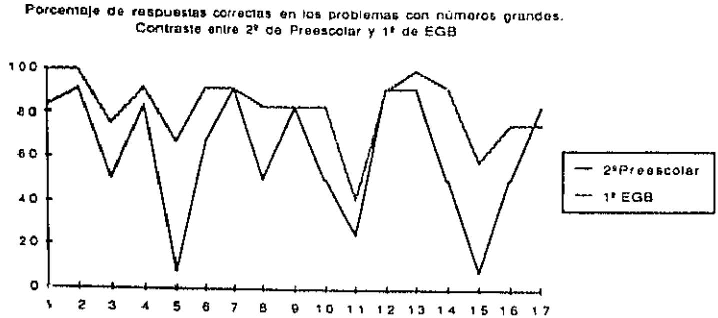
Sin embargo, muy pronto -ya en **2º de Preescolar**- desaparece tal diferencia en grado de dificultad, **resolviendo los problemas de Cambio y Combinación con la misma facilidad** (con números pequeños se consigue el 100% de respuestas correctas tanto en un problema como en otro), lo que está de acuerdo con otros datos consultados (Baroody y Ginsburg, 1.986; Briars y Larkin, 1.984; Riley Greeno y Heller, 1.983).). Seguramente, la expresión "en total" incluida en la cuestión del problema Combinación 1, facilita su solución al constituir una fuerte señal para la acción de juntar. Briars y Larkin (1.984) explican la tendencia a la desaparición de las diferencias en dificultad entre ambas categorías de problemas, por el posible empleo del esquema unitario (presumiblemente más sencillo) por parte de los niños también en el problema de Combinación. Estamos de acuerdo con estos autores cuando afirman que, de hecho, los niños pequeños resuelven todos los problemas como problemas de acción, como cambios de montones de fichas. Para resolver problemas como Combinación 1 utilizando una representación concreta, el niño tiene que traducir una situación estática en acciones que puedan ejecutarse con fichas.

Por último, el tercer problema en cuya solución se aprecia un progreso importante es **Comparación 2**, cuando se presenta con explicación, ya que sin ella, sólo un niño de 1º de Preescolar y 3 de 2º son capaces de resolverlo. Ya nos hemos referido a la gran importancia que tiene la expresión lingüística en la formulación de problemas. Cuando los problemas comparativos, en general, se formulan con el lenguaje habitual en ellos, la diferencia significativa se encuentra entre 1º y 2º de EGB. Es en este último curso donde los niños comienzan a comprender bien los términos comparativos (en nuestra muestra los entiende el 58,33% de los niños de 2º de EGB).

Al omitir los términos comparativos, la totalidad de los niños de 2º de Preescolar lo resuelven correctamente utilizando números pequeños, mientras que en 1º lo hace el 58,33%. Hay que hacer notar la gran similitud del problema comparativo modificado ("Jorge ha pescado los mismos que Luis y dos más", en lugar de "Jorge ha pescado dos más que Luis") con el problema Combinación 1. De hecho, los porcentajes de corrección de ambos problemas coinciden en 1º de Preescolar en los dos tamaños del número.

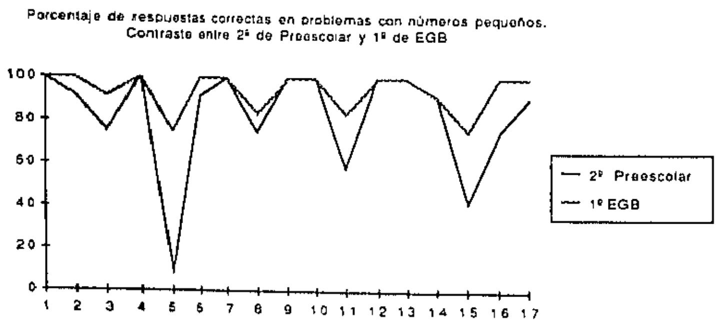
En el paso de 2º de Preescolar a 1º de EGB tienen lugar **avances** significativos en **Cambio 5** (tanto con números grandes como con números pequeños), **Comparación 2 (con explicación)** e **Igualación 4** (estos dos últimos sólo con números grandes). El mayor progreso en los problemas al llegar a EGB se ha observado en Cambio 5 : mientras que sólo un niño de 2º de Preescolar lo resuelve, independientemente de la magnitud del número, lo consiguen 8 niños de 1º de EGB si se utilizan números grandes y 9 si se reduce el tamaño de los mismos. **En este curso las mejoras se centran únicamente a los tres problemas mencionados, pero son fundamentales desde el punto de vista cualitativo por cuanto que afectan a dos de los problemas más difíciles** y que suponen una capacidad de representación mental previa de las relaciones y cambios descritos en los problemas. Ya hemos visto cómo los autores coinciden en situar los problemas con comienzo desconocido en el nivel de mayor dificultad. También se aprecia aquí la influencia del tamaño del número : **las diferencias entre ambos cursos es más acusada en los problemas con números grandes, poniendo en evidencia un mayor dominio en los de 1º de EGB.** Veamos los contrastes entre ambos cursos tanto cuando aplicamos los problemas con números grandes como cuando lo hacemos con números pequeños:

Gráfico 6.1.21



Con números grandes la diferencia más marcada entre 2º de Preescolar y 1º de EGB se encuentra en los problemas **Cambio 5** (5), **Comparación 2** (10) **e Igualación 4** (15) en los que alcanza significatividad estadística.

Gráfico 6.1.22

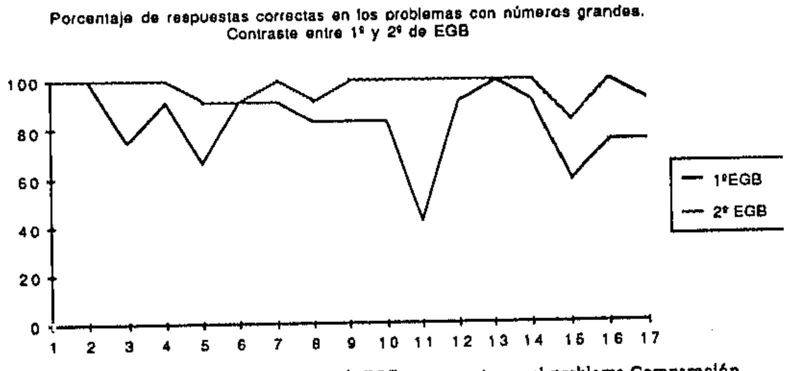


Con números pequeños, la única diferencia que llega a ser significativa estadísticamente, se encuentra en el problema **Cambio 5** (5). Cabe destacar asimismo la superioridad de 1º de EGB en los problemas Cambio 3, Comparación 3 e Igualación 5.

El gran avance realizado en **2º de EGB** se centra en los **problemas comparativos**..Cuando se plantean sin explicación, siete niños de este curso son capaces de resolver los tres correctamente (58,33%), mientras que esto no lo consigue ninguno de 1º de EGB. Si estos problemas se reformulan para hacerlos comprensibles, el porcentaje de respuestas correctas aumenta de forma significativa en todos los cursos, alcanzando el 100% para los tres problemas de Comparación en 2º de EGB. En esta última presentación, la diferencia con respecto a los resultados obtenidos en 1º de EGB llega a ser significativa sólo en el problema **Comparación 3** con números grandes, que es el más difícil (Briars y Larkin, 1.984) y en el que todavía 7 niños de 1º de EGB fallaron.

Aparte de este problema, no se aprecian diferencias que alcancen significatividad estadística. Sin embargo, caben resaltar los progresos realizados también en los problemas Cambio 5 e Igualación 4 en los dos tamaños del número. Es decir, **los tres problemas más difíciles : Cambio 5, Comparación 3 e Igualación 4 siguen experimentando mejoras en el paso a 2º de EGB, sin alcanzar ninguno de ellos el techo en este curso.** Puede verse esto reflejado en el siguiente gráfico:

Gráfico 6.1.23



La diferencia significativa en el paso de 1º a 2º de EGB se encuentra en el problema **Comparación 3 (incluso con explicación)** (11). El problema más difícil en 2º de EGB es el problema Igualación 4, donde todavía fallan dos niños de este curso.

Curso en el que se consigue el dominio de cada uno de los problemas.

Si consideramos que un curso alcanza el dominio de un determinado problema cuando consigue un 75% de respuestas correctas, obtenemos una clasificación que difiere, evidentemente, según el tamaño del número.

Con **números pequeños**, la distribución de los problemas quedaría del siguiente modo :

Tabla 6.1.2

1º Preescolar	2º Preescolar	1º EGB	2º EGB
Cambio 1	Cambio 3	Cambio 5	
Cambio 2	Cambio 4	Comparación 3	
Cambio 6	Combinación 1	Igualación 4	
	Combinación 2		
	Comparación 1		
	Comparación 2		
	Igualación 1		
	Igualación 2		
	Igualación 3		
	Igualación 5		
	Igualación 6		

Cuando los números les son asequibles, los niños de **1º de Preescolar** consiguen como grupo, una buena realización en los problemas **Cambio 1**, **Cambio 2** y **Cambio 6**. Ya hemos comentado la facilidad de los dos primeros al tratarse de problemas de acción con la incógnita en el resultado (las sentencias numéricas que subyacen son, respectivamente, 3 + 5 = ? y 6 - 2 = ?) y , por lo tanto, susceptibles de ser modelados directamente por el niño. El éxito que los más pequeños tienen en este tipo de problemas con números de tamaño reducido, ha sido señalado por numerosos autores (Carpenter, Hiebert y Moser, 1.981; Riley, 1.981; Tamburino, 1.980...).

Nos resulta, en cambio, más difícil explicar el buen resultado conseguido por estos niños en el problema Cambio 6, que comienza con un dato desconocido (? - 3 = 2), lo que, como se ha visto y se ha contrastado con otros estudios, resulta desconcertante para los niños y suele ser un error frecuente incluso en los primeros grados de la escolaridad obligatoria (según los datos de Riley (1.981) en 2º grado falla todavía el 30% de los niños y en 3º grado el 20%). El mismo lugar ocupa la incógnita en el problema Cambio 5 (Cambio-Juntar), resuelto sólo por dos niños de 1º de Preescolar frente a nueve que resuelven Cambio 6 (Cambio- Separar). Ya hemos indicado que Briars y Larkin (1.984) consideran que la diferencia en dificultad entre ambos problemas es una cuestión todavía sin aclarar.

En general, en nuestro estudio, entre los problemas que comparten una misma estructura semántica y en los que la incógnita ocupa el mismo lugar, resulta más fácil el problema cuya acción implica Separar que aquel en el que subyace la acción de Juntar y la razón que, en principio, encontramos es la mayor facilidad de modelar el primero, representando paso a paso cada uno de los enunciados : el niño tiene en todo momento perceptibles y bien delimitadas las tres cantidades descritas en el problema, lo que no ocurre en los problemas de Juntar.

No obstante, es necesario analizar las estrategias que usan los niños de este curso al resolver este problema para explicarnos el grado de facilidad hallado en este trabajo y que no concuerda con el hallado por otros investigadores.

En **2º de Preescolar**, tal y como vemos en la tabla, se alcanza el criterio del 75% de respuestas correctas en 11 problemas más, de modo que sólo quedan tres que podemos considerar fuera del alcance de los niños de este curso : Cambio 5, Comparación 3 e Igualación 4. Se recordará que estos tres problemas han sido los más difíciles para el conjunto de la muestra.

El dominio alcanzado en los problemas **Cambio 4, Combinación 1**, así como en **Comparación 1** y **Comparación 2 con explicación**, siempre y cuando los niños pueden realizar representaciones concretas por medio de fichas o de dibujos, era algo totalmente esperable si partimos de los modelos teóricos mencionados. Todos ellos pueden resolverse sin necesidad de una representación interna de la situación del problema (Riley, Greeno y Heller, 1.983).

Sin embargo, llama la atención el buen resultado encontrado en **Cambio 3** y **Combinación 2**, que exigen un mayor nivel de abstracción. Riley, Greeno y Heller (1.983) sitúan el problema Cambio 3 en un segundo nivel de "performance", por encima de los problemas de Cambio 1, 2 y 4. En su opinión, la solución de tal problema exige mantener en la memoria el papel estructural de cada item de información. Con respecto al problema Combinación 2 defienden la necesidad de un esquema parte-todo para solucionarlo, sin el cual, el niño interpretaría cada línea del problema separadamente, sin poder inferir la relación entre los dos subconjuntos. Briars y Larkin (1.984) indican la necesidad de contadores de doble rol.tanto para Combinación 2 como para Cambio 3.

En nuestro trabajo, el problema Cambio 3, de acuerdo con los modelos teóricos mencionados, ha resultado significativamente más difícil que Cambio 4 en los dos tamaños del número. Lo mismo podemos decir de Combinación 2 en relación a Combinación 1. Sin embargo, con números pequeños el criterio establecido del 75% se alcanza para todos estos ellos en este curso. Al estudiar los procedimientos utilizados por los niños, hemos de comparar la realización de los más pequeños con la que hacen los niños en edades más avanzadas, para ver si necesariamente su solución supone el cumplimiento de los requisitos indicados o bien, pueden resolverse, cuando los números son pequeños, de una forma intuitiva. En todo caso recordemos que sólo dos niños de 2º de Preescolar alcanzan el nivel 3 en la prueba de Inclusión (que evalúa la comprensión de las relaciones parte-todo, supuestamente necesaria para utilizar contadores de doble rol).

Hay que destacar asimismo, el **porcentaje elevado** en todos los problemas de **Igualación** excepto en el 4 (Igualación-Separar. Comienzo desconocido). Este resultado no coincide con el obtenido por Bermejo y Rodríguez (1.987), quienes encuentran los problemas de Igualación más complejos que los de Combinación en 2º de Preescolar y 1º de EGB y concluyen en una incapacidad en los niños preescolares para construir una representación mental adecuada de los problemas de Igualación.

En nuestro estudio, en 2º de Preescolar, el problema Combinación 1, lo mismo que los problemas Igualación 1 e Igualación 2 alcanzan el máximo de respuestas correctas, cuando se plantean con números pequeños. El problema Combinación 2 resulta algo más difícil que Igualación 3 e Igualación 6 y del mismo índice de dificultad que Igualación 5. El único problema de Igualación que claramente ofrece mayor dificultad que los problemas de Combinación, y esto ocurre en todos los cursos, es Igualación 4 (en 1º de Preescolar, además, Igualación 5) variedades que no han sido incluidas en el citado estudio.

Esta contradicción merece una consideración pausada por nuestra parte, analizando el modo de presentación, los procedimientos que utilizan los niños, tipos de error que cometen... En principio no nos parece contradictoria la afirmación que hacen los autores de "incapacidad de representarse mentalmente los problemas" con el hecho de solucionarlos correctamente. Puede ocurrir que los niños encuentren la solución modelando directamente la situación descrita en el problema, asimilando estos problemas a los de Cambio y apoyándose en ayudas manipulativas, sin necesidad de una representación mental previa. En efecto, pensamos que algunos de los problemas de Igualación no exigen el tercer nivel de realización diseñado en los modelos descritos de Briars y Larkin (1.984) o de Riley, Greeno y Heller (1.983). No obstante, esta cuestión será analizada más adelante, al plantearnos el estudio de estrategias utilizadas en la solución de problemas.

A la vista de estos datos, podemos afirmar que **el paso de 1º a 2º de Preescolar significa un avance decisivo en la resolución de problemas verbales sencillos de adición y sustracción, alcanzando un nivel de ejecución muy alto en la mayor parte de problemas con números pequeños.**

Es en **1º de EGB** donde se alcanza el **dominio de la totalidad de los problemas cuando se plantean en el tamaño reducido del número**. Los tres problemas más difíciles consiguen al menos el 75% de respuestas correctas. Sin embargo, todavía hay que esperar a 2º de EGB para que tales problemas sean resueltos por todos los niños.

Tal y como se ha visto a partir de los análisis realizados en la muestra global, el tamaño del número influye de un modo decisivo en los resultados obtenidos en todos y cada uno de los problemas, si bien varía entre ellos el nivel de significación estadística. Ahora bien, considerando separadamente los grupos de Preescolar y EGB, comprobamos que la **influencia de esta variable es notablemente mayor en el grupo de Preescolar, donde las diferencias significativas se extienden a todos los problemas a excepción de Cambio 5**, cuya gran dificultad a esta edad parece estar al margen de la magnitud del número. Si analizamos lo que ocurre en el interior de Preescolar, observamos, a su vez, una mayor influencia de esta variable en 1º de Preescolar. **En EGB, el tamaño del número sólo afecta significativamente a la solución de los problemas Comparación 3, Igualación 4, Igualación 5 e Igualación 6.** Tales diferencias están producidas fundamentalmente por los resultados de 1º de EGB.

De este modo, al afectar el tamaño del número de forma diferente a los distintos problemas, según los cursos escolares, podemos formar una nueva tabla de distribución de los mismos atendiendo al curso en el que se domina su solución **con números grandes** :

Tabla 6.1.3

1º Preescolar	**2º Preescolar**	**1º EGB**	**2º EGB**
	Cambio 1	Cambio 3	Cambio 5
	Cambio 2	Cambio 6	Comparación 3
	Cambio 4	Combinación 2	Igualación 4
	Combinación 1	Comparación 2	
	Comparación 1	Igualación 3	
	Igualación 1	Igualación 5	
	Igualación 2		
	Igualación 6		

De nuevo se aprecia el **importante paso que se da entre 1º y 2º de Preescolar en la solución de problemas, en este caso con números grandes.** Como decíamos antes, en 2º de Preescolar tiene lugar un gran progreso en el dominio del conteo : por lo general, los preescolares mayores manejan sin dificultad los números utilizados en estos problemas (hasta el 16), mientras que sólo dos niños de 1º de Preescolar (Delia y Jorge) dan muestras de esta habilidad.

El nivel de realización en los problemas con números grandes es, por lo tanto, necesariamente bajo en 1º de Preescolar. *Ahora bien, está claro* que los bajos porcentajes encontrados se deben en gran medida al desconocimiento de los números empleados y no a una incapacidad para resolver los problemas aritméticos de enunciado verbal, ya que, como se ha visto, **la proporción de niños que los resuelve al reducir el tamaño de los números es considerablemente mayor en todos ellos excepto en Cambio 5**, que permanece muy difícil en esta condición.

En 2º de Preescolar *los niños consiguen dominar*, como grupo, la solución de problemas que, en la interpretación de Briars y Larkin (1.984), exigen únicamente contadores de un sólo rol y, que, por lo tanto, pueden situarse en un primer nivel de dificultad, como lo hace también el modelo de Riley, Greeno y Heller (1.983). Además estos niños no parecen tener dificultad en los problemas de **Igualación** 1, 2 y 6, no estudiados por los autores mencionados. Como ya hemos anunciado, nuestra opinión es que, al menos estos tres problemas de Igualación pueden solucionarse por modelado directo siguiendo paso a paso los enunciados del problema y que no requieren siquiera lo que Briars y Larkin denominan "contadores de doble rol".

Con números grandes, los niños de **1º de EGB** no consiguen el 75% de respuestas correctas en los tres problemas más difíciles (Cambio 5, Comparación 3 e Igualación 4) y que , de acuerdo con Briars y Larkin y Riley, Greeno y Heller requieren una representación mental "de arriba a abajo". A grandes rasgos podemos decir que la realización de este curso equivaldría a un segundo nivel tanto en el modelo de Briars y Larkin como en el de Riley, Greeno y Heller. Es decir el nivel en el que se utilizan ya contadores de doble rol (Briars y Larkin), y que exige una retención de la estructura del problema aun cuando todavía no se ha llegado todavía a una representación de arriba a abajo (Riley, Greeno y Heller). De este modo se explica el dominio en este curso de problemas como Cambio 3, Combinación 2 y Comparación 2.

Un dato que llama la atención es el resultado en **Cambio 6** : mientras que con números pequeños llega a dominarse en 1º de Preescolar, con números grandes no llega a ser resuelto, al menos por el 75% de los niños, hasta 1º de EGB. Este problema en el que se desconoce el punto de partida exige, según los modelos consultados, una representación mental previa a su ejecución, por lo que habría que situar en el nivel más avanzado, como ocurre con el problema Cambio 5. El dominio del problema Cambio 6 en 1º de EGB está más de acuerdo, por tanto, con estas interpretaciones que su resolución mayoritaria en 1º de Preescolar. De nuevo aquí, el tamaño del número juega un papel primordial; puede ser, como hemos venido diciendo, que al reducir la magnitud de los números los niños pueden resolver los problemas intuitivamente, sin la elaboración previa exigida cuando hay que hacer cálculos para hallar la solución.

En la distribución que hemos realizado de los problemas, aparecen claramente tres niveles de dificultad en los problemas de Igualación. Los del primer nivel : Igualación 1, Igualación 2 e Igualación 6 son resueltos por la casi totalidad de los niños de 2º de Preescolar examinados incluso con números grandes. La solución correcta de los del segundo nivel : Igualación 3 e Igualación 5 se consigue mayoritariamente en 1º de EGB. El problema de Igualación más difícil (Igualación 4) no alcanza el 75% de respuestas correctas hasta 2º de EGB. Hay que hacer notar que esta clasificación no es del todo coincidente con la realizada a partir de los resultados globales de la muestra total, debido a que, como veremos de inmediato, la distribución de los problemas en distintos niveles de dificultad, no es equiparable en los distintos cursos y, así, por ejemplo, el orden de dificultad de los problemas Igualación 3 e Igualación 6 se invierte al pasar de Preescolar a EGB.

Es en **2º de EGB** cuando los niños llegan a superar como grupo la realización de los problemas **Cambio 5, Comparación 3 con explicación e Igualación 4**. En Cambio 5 y en Igualación 4 todavía se han encontrado uno y dos fallos respectivamente. El análisis de los mismos nos será de interés para analizar el tipo de dificultad que los niños encuentran en su solución. El problema Comparación 3, en cambio, ha sido resuelto por la totalidad de los niños de 2º de EGB, pero siempre y cuando se reformule su enunciado para esquivar el obstáculo lingüístico que suponen los términos comparativos, puesto que sólo hay 7 **niños** de este curso (el 58,33%) que los comprenden sin dificultad (lo que les permite solucionar los tres problemas de Comparación planteados.

Clasificación de los problemas en niveles de dificultad según el curso.

Vamos a detenernos en la dificultad relativa de los distintos problemas considerando las muestras de Preescolar y de EGB por separado. Tenemos en cuenta la variable "tamaño del número", dada su gran influencia en los porcentajes de corrección, realizando, para cada ciclo escolar, una doble clasificación que presentamos en las siguientes tablas:

Tabla 6.1.4: Distribución de los problemas con números grandes en Preescolar, en orden de de dificultad creciente

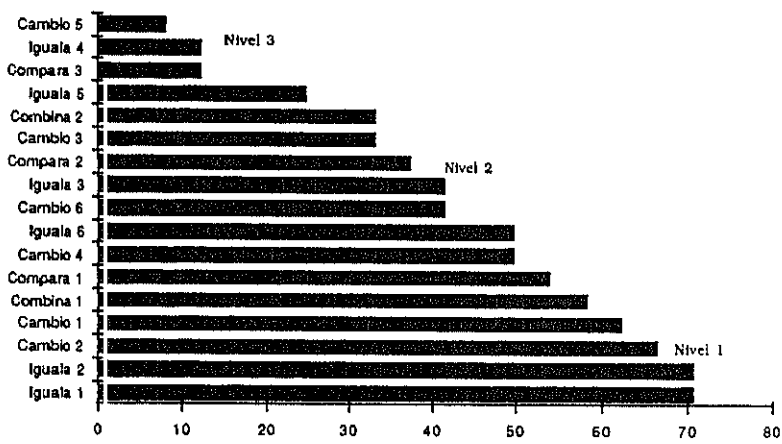
Nivel 1 : Cambio 1- Cambio 2- Combinación 1- Igualación 1- Igualación 2

Nivel 2 : Cambio 3- Cambio 6- Combinación 2- Comparación 2* - Igualación 5.

Nivel 3 : Cambio 5- Comparación 3*- Igualación 4.

Entre los niveles 1 y 2, se encuentran los problemas Cambio 4, Comparación 1*, Igualación 3 e Igualación 6, cuyas proporciones de respuestas correctas no difieren significativamente de las encontradas en los problemas del nivel 1 y del nivel 2.

Gráfico 6.1.24: Niveles de dificultad en los problemas con números grandes en PREESCOLAR



* Los resultados en los problemas comparativos se refieren aquí a su presentación con explicación.

Si examinamos cada curso de Preescolar por separado, nos encontramos con algunas diferencias que merece destacar :

- En primer lugar, los problemas Cambio 4 e Igualación 6 aparecen más difíciles relativamente en 1º de Preescolar (quedarían situados en un segundo nivel) que en 2º (se ubicarían en un primer nivel de dificultad).

- Los problemas Comparación 1 y Comparación 2 resultan igualmente difíciles en 1º (sólo los resuelven tres niños), mientras que en 2º se diferencian claramente con una mayor proporción de respuestas correctas en Comparación 1 (.83 frente a .50), lo que viene a coincidir con la ordenación en dificultad señalada por Briars y Larkin (1.984).

- En los problemas Igualación 4 e Igualación 5 se invierten el orden de su dificultad relativa al pasar de 1º a 2º de Preescolar. En 1º aparece más difícil Igualación 5, sin que ninguno de los niños haya llegado a solucionarlo, mientras que a partir de 2º de Preescolar es Igualación 4 el que ofrece mayor dificultad.

Hay que resaltar que dos niños de 1º de Preescolar resuelven correctamente este último problema con números grandes cuando todavía fallan en él dos niños de 2º de EGB y 5 de 1º. Este hecho será objeto de un análisis para contrastar los procedimientos que utilizan los niños que, sin haberse iniciado en las operaciones aritméticas, encuentran la solución al problema y los alumnos que, cursando el segundo año de instrucción formal en las matemáticas, siguen cometiendo errores en el mismo. Es interesante además averiguar si el tipo de fallos cometidos por los mayores es semejante al encontrado entre los más pequeños.

Al **reducir el tamaño del número**, el segundo nivel de la clasificación que acabamos de presentar relativa a toda la muestra de Preescolar, se desdobla en dos grupos con diferencias significativas entre ellos : los problemas Cambio 3, Combinación 2 e Igualación 5 aparecen significativamente más difíciles que Cambio 6 y Comparación 2 y sin diferencias significativas con Comparación 3 e Igualación 4. Por otra parte, el problema Cambio 5 se revela como el más difícil de todos, con diferencias altamente significativas con todos los demás. La nueva categorización, que presentamos ahora, nos parece la más adecuada en Preescolar, ya que la limitación que los niños tienen en el conteo introduce variaciones importantes ajenas a la estructura del problema.

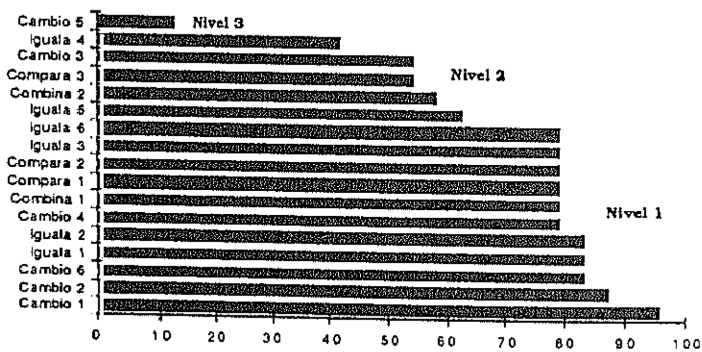
Tabla 6.1.5 : Distribución de los problemas con números pequeños en Preescolar, en orden de de dificultad creciente

Nivel 1 : Cambio 1- Cambio 2- Cambio 6- Igualación 1- Igualación 2- Cambio 4- Combinación 1- Comparación 1- Comparación 2- Igualación 3- Igualación 6.

Nivel 2 : Cambio 3- Combinación 2- Comparación 3- Igualación 4- Igualación 5.

Nivel 3 : Cambio 5.

Gráfico 6.1.25: Niveles de dificultad en los problemas con números pequeños en PREESCOLAR



Es preciso matizar que el problema Cambio 1, se destaca como el más fácil de todos, con diferencias significativas con todos ellos excepto con Cambio 2, de modo que en el primer nivel cabría distinguir tres subniveles :

Nivel 1a : Cambio 1 y Cambio 2

Nivel 1b : Cambio 6, Igualación 1 e Igualación 2

Nivel 1c : Cambio 4, Combinación 1, Comparación 1, Comparación 2, Igualación 3 e Igualación 6

En el nivel dos, aunque no haya diferencia significativa en la proporción de respuestas correctas, podemos indicar dos subniveles :

Nivel 2a : Cambio 3, Combinación 2, Igualación 5 y Comparación 3

Nivel 2b : Igualación 4

Aunque varía algo la dificultad relativa de algunos problemas al pasar de 1º a 2º de Preescolar (por ejemplo, Cambio 3 se hace relativamente más fácil mientras que Igualación 4 se hace relativamente más difícil), en términos generales la clasificación realizada se ajusta tanto a los resultados de uno como de otro curso.

En **EGB**, al resultar muy fáciles los problemas con números pequeños, los porcentajes de respuestas correctas tienden a igualarse en el máximo, encontrando únicamente diferencias significativas entre los obtenidos en Cambio 5 e Igualación 4 con el resto de los problemas. Por ello, en este caso, resulta más apropiado tener en cuenta la clasificación realizada con números grandes.

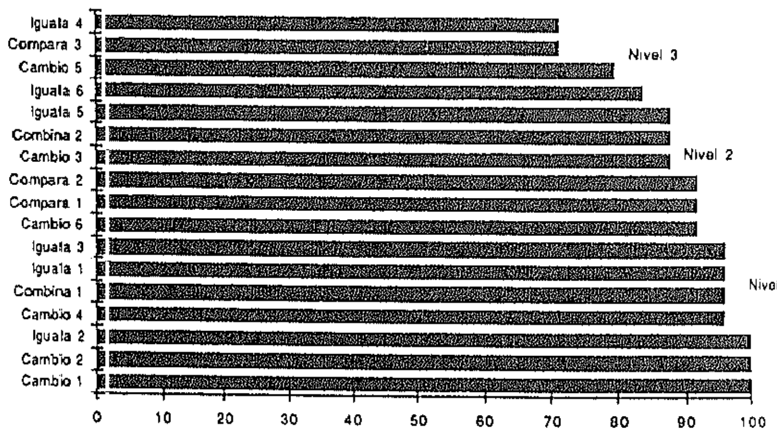
Tabla 6.1.6.: Distribución de los problemas con números grandes en EGB, en orden de de dificultad creciente

Nivel 1 : Cambio 1- Cambio 2- Cambio 4- Cambio 6- Combinación 1- Comparación 1- Comparación 2- Igualación 1- Igualación 2- Igualación 3

Nivel 2 : Cambio 3- Combinación 2- Igualación 5- Igualación 6

Nivel 3 : Cambio 5- Comparación 3- Igualación 4

Gráfico 6.1.26: Niveles de dificultad en los problemas con números grandes en EGB



En los problemas situados en el primer nivel nos encontramos con un máximo de dos fallos. En el segundo, con un máximo de cuatro y en el tercero los que han sido fallados por más de cinco niños. **Las diferencias significativas se encuentran entre los dos niveles extremos; el nivel dos podemos considerarlo como uno intermedio entre ambos.**

La mayor parte de las diferencias quedan establecidas por los resultados en 1º de EGB ya que en 2º sólo se encuentra un error en los problemas Cambio 5, Cambio 6, Combinación 2 e Igualación 6, y dos errores en el problema Igualación 4.

La principal diferencia con la clasificación realizada en Preescolar (con números pequeños) se encuentra en el problema Igualación 6 que se hace más difícil, en relación con los demás, al entrar en la EGB. Además, los problemas Cambio 3, Combinación 2 e Igualación 5 en Preescolar quedan equiparados en dificultad a Comparación 3 e Igualación 4, mientras que éstos últimos aparecen como más difíciles en EGB.

A partir de las distintas clasificaciones realizadas, llegamos a algunas constantes:

- Los problemas **más fáciles**, tanto si tenemos en cuenta la muestra total, como si consideramos cada curso por separado o cada ciclo escolar son **Cambio 1, Cambio 2, Igualación 1 e Igualación 2.**

- Los problemas **Cambio 5, Comparación 3 e Igualación 4** resultan los **más difíciles** sea cual sea el grupo que examinamos.

- Los problemas inmediatamente más difíciles que los anteriores son **Cambio 3, Combinación 2 e Igualación 5**

- Los problemas **Cambio 4, Cambio 6, Combinación 1, Comparación 1 (con explicación), Comparación 2 (con explicación), Igualación 3** e **Igualación 6** presentan aproximadamente el mismo grado de dificultad. En la clasificación hecha a partir de los datos obtenidos en la muestra total (donde hemos distinguido cuatro niveles) aparecen en un segundo nivel de dificultad : después del nivel de Cambio 1 y antes del nivel de Cambio 3. En los grupos de Preescolar y EGB los hemos situado en el nivel de los más fáciles (excepto Igualación 6 en EGB). Si tenemos en cuenta sólo 1º de Preescolar, resultan claramente más difíciles sobre todo que Cambio 1 y Cambio 2, pero ya en 2º de Preescolar se igualan a éstos; es en ellos donde se aprecia el primer progreso en la solución de problemas, de modo que con números pequeños ya se dominan en 2º de Preescolar.

Interacción entre la variable "nivel de rendimiento" y los distintos tipos de problemas.

Vamos a comentar ahora las diferencias halladas en cada uno de los problemas según sea el nivel de rendimiento de los niños dentro de cada curso o de un mismo ciclo escolar. Como se recordará las técnicas estadísticas utilizadas para comprobar su significatividad, han sido ji-cuadrado cuando las muestras son superiores a 20 y la prueba de la probabilidad exacta de Fisher con muestras menores.

Los contrastes los hemos realizado, en primer lugar, entre los niveles de rendimiento de un mismo grupo, y a continuación entre el nivel superior de Preescolar e inferior.de EGB.

Tratamos de saber qué problemas resultan más afectados en cada curso por el nivel de rendimiento de los alumnos y dónde se encuentran las diferencias y semejanzas entre los "mejores", según valoración académica, de Preescolar y los "peores" de EGB. Es decir, pretendemos averiguar cómo influye esta variable en el éxito o fracaso de cada tipo de problemas, y de comprobar cómo interacciona con la variable curso/edad.

Influencia del nivel de rendimiento en la solución de los distintos tipos de problemas, dentro de un mismo grado escolar.

En **1º de Preescolar**, los niños de rendimiento alto difieren significativamente de los de bajo rendimiento en los problemas

Combinación 1, Comparación 1 (con explicación) e Igualación 2 con números pequeños. Mientras que todos los del grupo alto encuentran la solución correcta, no lo hace ninguno de los del grupo bajo. Son problemas clasificados como fáciles; en la distribución que hemos hecho para Preescolar con números pequeños, quedan en el nivel 1.

La prueba de la probabilidad exacta de Fisher sólo destaca como significativas estas diferencias extremas. Sin embargo, cabe también resaltar, al menos, aquéllos problemas en los que los niños de baja valoración académica se muestran incapaces de resolver, cuando entre los de alta hay, como máximo, un fallo. El poder discriminativo de tales problemas es, por tanto, muy alto. En esta situación se hallan **Cambio 3** (3), **Combinación 2** (8) **e Igualación 5** (16), problemas todos ellos que se encuentran entre los más difíciles.

El problema que ofrece mayor dificultad en este curso, **Cambio 5** (5), sólo lo resuelven dos niños del grupo superior (Delia y Jorge), que aventajan de forma clara al resto de los que componen el mismo.

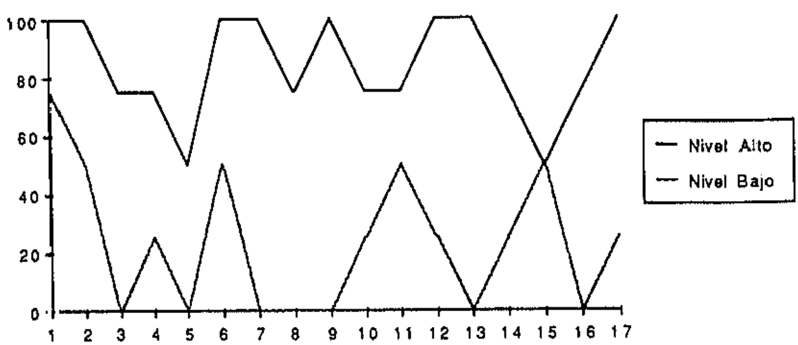
En Igualación 4 (15), llama la atención que el número de respuestas correctas se repartan indistintamente por los tres niveles de rendimiento, siendo nula, por tanto, su capacidad de discriminación entre unos alumnos y otros. Se trata de un caso discrepante, ya que está entre los problemas fáciles para los niños de nivel bajo y entre los difíciles para los de nivel alto (el porcentaje de corrección es del 50% en ambos grupos). Nos queda la duda de que lo hayan comprendido todos los que lo resuelven; pensamos más bien que los dos niños de nivel bajo (Luis y Violeta) han encontrado el resultado correcto por la tendencia a representar con fichas y juntar las dos cantidades dadas en el problema.

En Comparación 3 llama la atención también que, siendo un problema difícil, lo lleguen a resolver 2 alumnos del nivel bajo de 1º de Preescolar cuando lo presentamos con números pequeños. Como veremos posteriormente, las respuestas han sido intuitivas y quizá podrían deberse al azar.

El mayor porcentaje de respuestas correctas entre los de bajo rendimiento se encuentra en Cambio 1 (75%), seguido de Cambio2, Cambio 6 e Igualación 4 (50%), y entre los de alto rendimiento en Cambio 1, Cambio 2, Cambio 6, Combinación 1, Comparacion 1 (con explicación), Igualación 1, Igualación 2, Igualación 6 (100% de respuestas correctas en todos ellos). Aquí encontramos de nuevo la contradicción, entre nuestros resultados en Cambio 6, problema que resuelve incluso la mitad de los niños del nivel bajo de 1º de Preescolar utilizando números pequeños, y los modelos teóricos estudiados, que sitúan este problema entre los más difíciles de la estructura semántica de Cambio. Presentamos en un gráfico los contrastes indicados:

Gráfico 6.1.27

Porcentaje de respuestas correctas en los problemas con números pequeños. Contraste entre el nivel alto y bajo de 1º de Preescolar

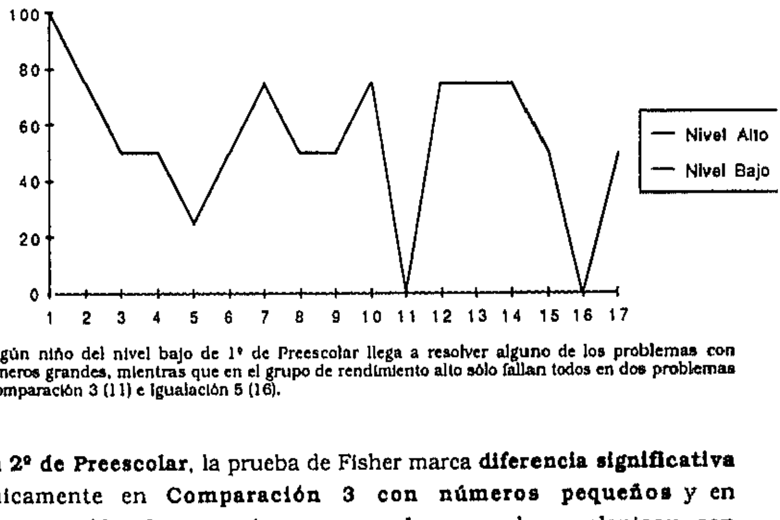


Cuando los problemas se plantean con números pequeños, la diferencia en porcentajes de éxito sólo alcanza significatividad estadística en los problemas Combinación 1 (7), Comparación 1 con explicación (9) e Igualación 2 (13). Cabe destacar sin embargo, el importante contraste en Cambio 3 (3), Cambio 5 (5), Combinación 2 (8) e Igualación 5 (16), que ninguno de los de nivel bajo llegan a resolver.

Con **números grandes**, ninguno de los niños de nivel bajo llegan a resolver problema alguno, mientras que los de nivel alto sólo fallan totalmente como grupo en Comparación 3 e Igualación 5. La diferencia significativa se encuentra sólo en **Cambio 1**, que llegan a resolver los cuatro niños de nivel alto. Debemos mencionar también el importante contraste en los problemas **Cambio 2, Combinación 1, Comparación 2 (con explicación), Igualación 1, Igualación 2 e Igualación 3**, en los que uno sólo de los niños del grupo alto falla. Tales problemas se encuentran, como se recordará, entre los más fáciles (niveles 1 y 2 de la clasificación general con números grandes). En el resto de los problemas sólo responden correctamente los dos alumnos que destacan entre sus compañeros, fallando uno de ellos (Delia) en Cambio 5.

Gráfico 6.1.28

Porcentaje de respuestas correctas en los problemas con números grandes. Contraste entre el nivel alto y bajo de 1º de Preescolar



Ningún niño del nivel bajo de 1º de Preescolar llega a resolver alguno de los problemas con números grandes, mientras que en el grupo de rendimiento alto sólo fallan todos en dos problemas : Comparación 3 (11) e Igualación 5 (16).

En **2º de Preescolar**, la prueba de Fisher marca **diferencia significativa** únicamente en **Comparación 3 con números pequeños** y en **Comparación 2 con números grandes**, cuando se plantean con explicación. Ambos problemas son resueltos por la totalidad de niños del nivel alto y por ninguno de los de nivel bajo. Podemos destacar también, aun cuando no alcance significatividad estadística, la capacidad discriminativa del problema **Comparación 3 con números grandes** en el que sólo falla un niño de nivel alto, mientras que ninguno de los niveles medio y bajo llegan a resolver. Recuérdese que los dos primeros problemas mencionados llegan a dominarse (75% de respuestas correctas), en 1º de EGB y el tercero en 2º de EGB.

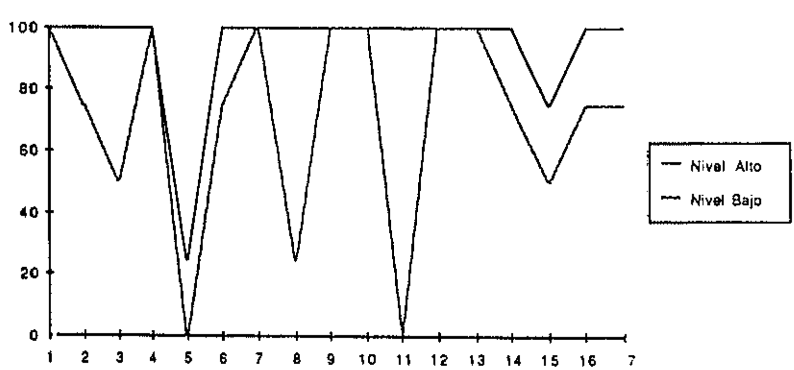
Cabe asimismo mencionar que el problema **Cambio 5** sólo lo resuelve un niño de 2º de Preescolar en los dos tamaños del número y éste niño es de nivel alto y que los tres únicos fallos en **Combinación 2 con números pequeños**, corresponden al nivel bajo.

Estos problemas excepto Comparación 3 con números grandes, discriminan también en 1º de Preescolar entre los "buenos" y los "malos" alumnos.

Las diferencias entre los niños de rendimiento alto y bajo en la ejecución en los problemas puede apreciarse en los dos gráficos que presentamos a continuación y correspondientes a los dos tamaños del número:

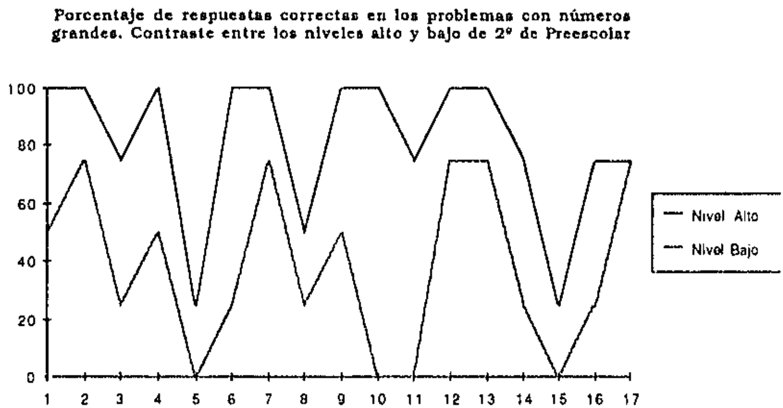
Gráfico 6.1.29

Porcentaje de respuestas correctas en los problemas con números pequeños. Contraste entre los niveles alto y bajo de 2º de Preescolar



La mayor diferencia se encuentra en el problema Comparación 3 (11): ningún niño del nivel bajo lo resuelve, mientras que lo hacen todos los de nivel alto. Sólo en este caso se alcanza significatividad estadística. Cabe destacar además la importante diferencia en los problemas Cambio 3 (3) y Combinación 2 (8).

Gráfico 6.1.30

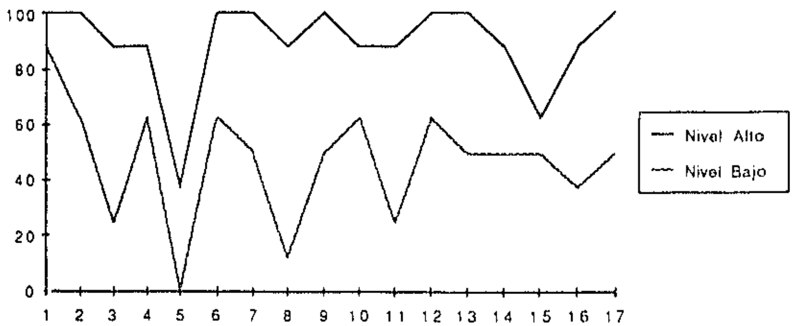


Con números grandes, la única diferencia que llega a ser significativa estadísticamente se encuentra en el problema Comparación 2 con explicación (10). Hay que resaltar, sin embargo, el contraste en los problemas Comparación 3, Cambio 5 e Igualación 4, que no resuelve ningún niño de nivel bajo.

Si ahora consideramos el **conjunto de los niños preescolares**, y comparamos, por medio de ji-cuadrado, los de alto con los de bajo nivel de rendimiento, nos encontramos con diferencias significativas en **Cambio 3, Combinación 2** y **Comparación 3 con números pequeños** y en **Cambio 1, Cambio 6, Comparación 2** e **Igualación 3 con números grandes.** Veamos la diferencia de porcentajes de éxito que presentan ambos grupos en cada uno de los problemas planteados en uno y otro tamaño del número:

Gráfico 6.1.31

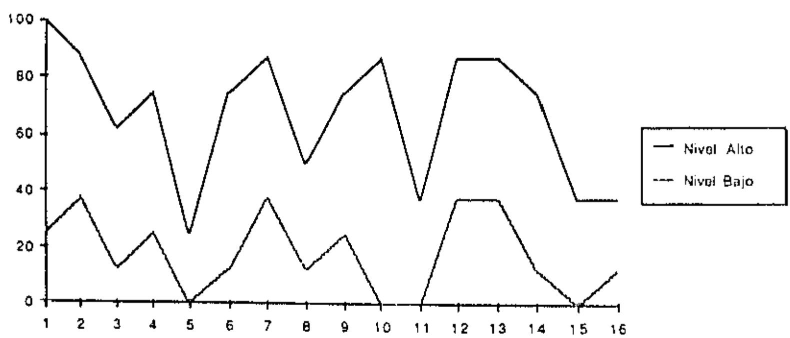
Porcentaje de respuestas correctas en los problemas con números pequeños. Contraste entre los niveles alto y bajo de PREESCOLAR



Con números pequeños se aprecia una superioridad clara en el grupo de rendimiento alto en todos los problemas. La diferencia es especialmente marcada en Combinación 2 (8), Comparación 3 con explicación (11) y Cambio 3 (3), donde alcanza significatividad estadística. Los de nivel alto siguen encontrando serias dificultades en la resolución de los problemas Cambio 5 (5) e Igualación 4 (16), por lo que, a pesar de su superioridad con respecto al nivel bajo, el contraste no llega a ser significativo

Gráfico 6.1.32

Porcentaje de respuestas correctas en los problemas con números grandes. Contraste entre los niveles alto y bajo de PREESCOLAR



Se aprecia una gran semejanza en la forma de ambas curvas, si bien se destaca la gran superioridad del grupo de rendimiento alto. La discrepancia mayor en el porcentaje de éxito se localiza aquí en problemas menos difíciles, ya que en los más difíciles siguen teniendo dificultad incluso los preescolares de rendimiento alto cuando aumentamos la magnitud del número. Se dan diferencias significativas en los problemas Cambio 1 (1), Cambio 6 (6), Comparación 2 (10) con explicación e Igualación 3 (14).

Como vemos, aquí desaparece la alta capacidad discriminativa que tenían los problemas Combinación 1, Comparación 1 e Igualación 2 con números pequeños en 1º , ya que tales problemas resultan muy fáciles en 2º de Preescolar y los resuelve la totalidad de los niños de ese curso.

En cambio, aparecen diferencias significativas entre un nivel de rendimiento y otro, que no se encontraban al analizar por separado los dos cursos. Es el caso de los problemas Cambio 3 y Combinación 2 con números pequeños así como de Cambio 6 e Igualación 3 con números grandes en los que ya diferían ampliamente, aunque no de forma estadísticamente significativa, los grupos de alto y bajo de rendimiento al menos en alguno de los cursos de Preescolar. Al sumarse las diferencias halladas en ambos, se alcanza el nivel de significatividad establecido.

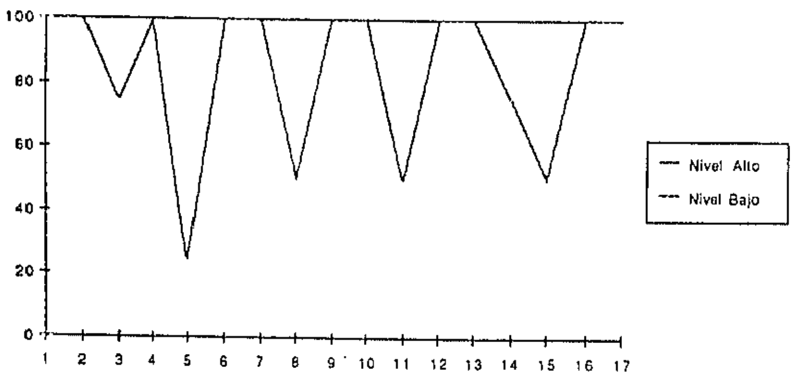
En resumen, **con números pequeños, los problemas más discriminativos en el conjunto de Preescolar están entre los de mayor grado de dificultad** (situados en el segundo nivel de los tres de que consta la clasificación general con números pequeños). Con **números grandes, las mayores diferencias entre los grupos de alto y de bajo rendimiento están en problemas considerados fáciles** en las distintas clasificaciones realizadas

Los problemas utilizados en nuestro estudio resultan muy fáciles, en general, para los niños de **1º y de 2º de EGB** de modo que hasta los de bajo nivel de rendimiento suelen obtener resultados satisfactorios. En todo caso, cuando se examinan por separado los resultados en un curso y otro curso de EGB, **no llega a apreciarse ninguna diferencia significativa.**

Con **números pequeños** los resuelve la totalidad de los niños del nivel alto de 1º y 2º de EGB, así como los de nivel bajo de este último curso. Los **fracasos** se localizan entre los de **bajo rendimiento de 1º de EGB** y, en general, en problemas que han sido valorados como difíciles. La mayor diferencia entre los niños de alto y bajo rendimiento se encuentra en el problema **Cambio 5** (100% frente a 25% de respuestas correctas). Podemos mencionar también los contrastes encontrados en **Combinación 2**, **Comparación 3** e **Igualación 4** (100% frente a 50% de corrección). Veámoslo en el siguiente gráfico.

Gráfico 6.1.33

Proporción de respuestas en los problemas con números pequeños. Contraste entre los niveles alto y bajo de 1º de EGB

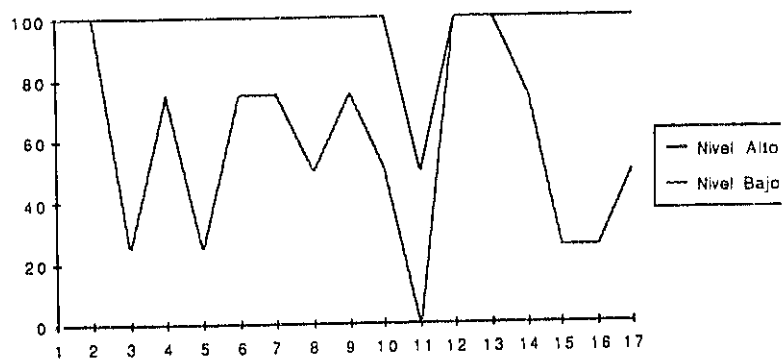


Aunque ninguna de las diferencias alcanza significatividad estadística, es importante constatar que éstas se hallan en los problemas de mayor dificultad: Cambio 3 (3), Cambio 5 (5), Combinación 2 (8), Comparación 3 (11) e Igualación 4 (15)

En el **nivel alto** de **1º de EGB** se encuentran fallos sólo en el problema **Comparación 3 con números grandes**, que lo resuelve la mitad de los niños de mejor rendimiento académico. Entre los de **rendimiento bajo** los **errores son todavía numerosos** cuando se plantean los problemas con números grandes y sólo resuelven bien todos los niños, los problemas más fáciles de los planteados y que ocupan el nivel 1 de las distintas clasificaciones realizadas : Cambio 1, Cambio 2, Igualación 1 e Igualación 2. Tales problemas llegan a dominarse ya en 2º de Preescolar. Cabe destacar los bajos porcentajes de respuestas correctas encontrados en **Comparación 3** (no lo resuelve ningún niño de nivel bajo), así como en **Cambio 3**, **Cambio 5**, **Igualación 4** e **Igualación 5** (los soluciona sólo un niño, o sea, el 25% del grupo), problemas todos ellos que están entre los más difíciles.

Gráfico 6.1.34

Proporción de respuestas correctas en los problemas con números grandes. Contraste entre los niveles alto y bajo de 1º de EGB

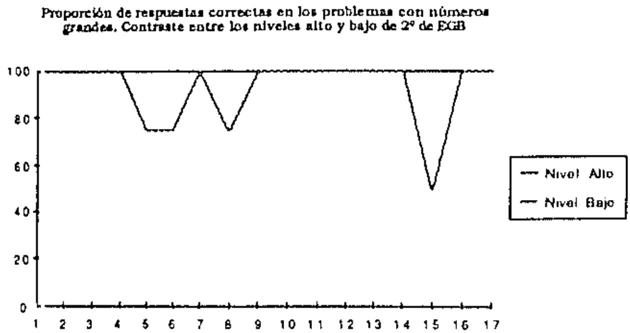


Entre los de nivel alto el único problema en el que encontramos fallos es Comparación 3 (11). Sin embargo, los de nivel bajo fracasan en numerosos problemas: sólo resuelven todos, los problemas más fáciles: Cambio 1 (1), Cambio 2 (2), Igualación 1 (12) e Igualación 2 (13). El problema Comparación 3 (11) no llega a resolverlo ninguno de éstos. Las diferencias en ningún caso llegan a ser significativas.

Con **números grandes** se encuentra un fallo entre los alumnos de peor rendimiento de **2º de EGB**, en los problemas **Cambio 5, Cambio 6 y Combinación 2** y dos fallos en **Igualación 4**. Las diferencias halladas entre los de un nivel de rendimiento y otro, claro está, no llegan a ser significativas, pero constituyen un dato importante a la hora de la valoración cualitativa de la dificultad de los problemas y que debemos contrastar con la capacidad que algunos niños más pequeños, incluso de 1º de Preescolar para resolverlos correctamente. Los problemas Cambio 5 e Igualación 4 están entre los más difíciles y hemos encontrado que no es hasta 2º de EGB cuando los podemos considerar superados. Sin embargo, los de Cambio 6 y Combinación 2 son más fáciles y se dominan ya en 1º de EGB.

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ... UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

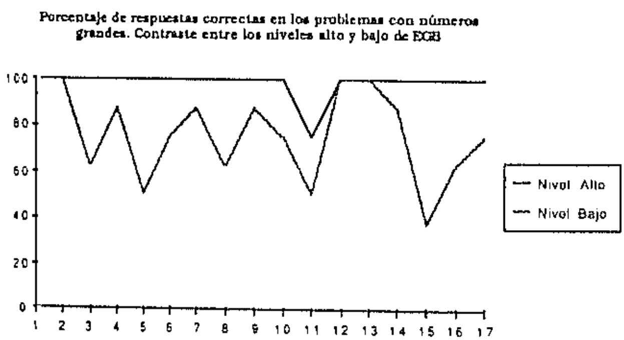
Gráfico 6.1.35



Todavía algunos niños de 2º de EGB tienen dificultad en la resolución de este tipo de problemas. Los fracasos se encuentran en los problemas Cambio 5 (5), Cambio 6 (6), Combinación 2 (8) e Igualación 4. No hay diferencias significativas.

Al considerar **el conjunto de la muestra de EGB**, hallamos una diferencia significativa entre los dos niveles extremos de rendimiento escolar, que se sitúa en el problema **Igualación 4 con números grandes.** Este problema, del mayor nivel de dificultad, lo resuelven bien todos los niños del nivel alto de EGB, mientras que fallan 5 niños de nivel bajo (20.83%).

Gráfico 6.1.36



El grupo de rendimiento bajo en EGB se muestra inferior al de rendimiento alto en todos los problemas excepto en los más fáciles (Cambio 1 (1), Cambio 2 (2), Igualación 1 (12) e Igualación 2 (13). La diferencia más marcada se ubica en los problemas más difíciles: Cambio 3 (3), Cambio 5 (5), Combinación 2 (8) y en **Igualación 4 (15)**. Sólo en este último caso se alcanza significatividad estadística. El problema Comparación 3 (11) con explicación sigue siendo difícil para el grupo alto, aunque resulta clara su superioridad

Esquematizando mucho podemos decir que, en **Preescolar**, las diferencias significativas entre los niveles de alto y bajo rendimiento se encuentran en **los problemas más difíciles con números pequeños y en los más fáciles con números grandes**,.ya que en los problemas más fáciles con números pequeños tienden a responder bien incluso los de bajo rendimiento, y en los problemas difíciles con números grandes tienden a fallar unos y otros. Sin embargo, en **EGB** sólo son dignas de mención algunas diferencias halladas en **problemas difíciles y con números grandes**, debido a que el resto tiende a ser resuelto por la totalidad de los niños, independientemente de cuál sea su nivel de rendimiento.

Efecto de la interacción del nivel de rendimiento y del curso escolar en la solución de los distintos problemas.

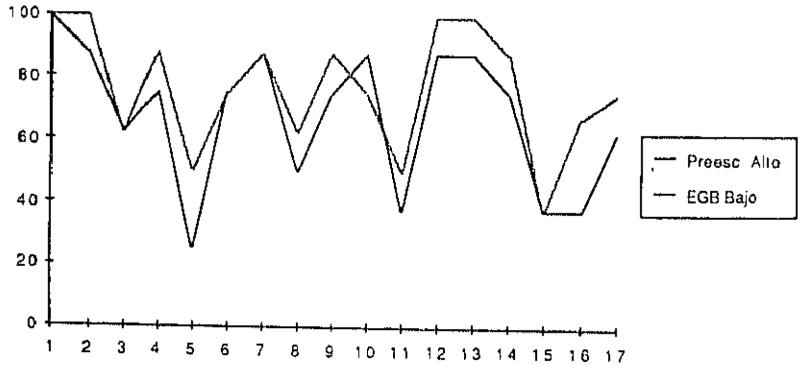
En lugar de analizar dónde se encuentran las diferencias entre los niños de un mismo curso pero con distinto nivel de rendimiento, ahora contrastaremos, al mismo tiempo, el curso y el nivel de rendimiento, centrándonos concretamente en los resultados obtenidos por los niños de Preescolar con mejor valoración académica y los niños de EGB de bajo rendimiento escolar, tal y como ha sido valorado éste por el profesor.

Hemos comentado las diferencias significativas halladas entre un ciclo escolar y otro en la mayor parte de los problemas con números grandes y en seis de los más difíciles con números pequeños

Estas diferencias desaparecen cuando tenemos en cuenta únicamente a los mejores alumnos de Preescolar y a los peores de EGB. Con números grandes se aprecia alguna diferencia pero siempre muy pequeña y favorable a EGB, lo que resulta lógico dado su mayor conocimiento de los números superiores a nueve. Cuando evitamos la influencia de éste, las desigualdades son mínimas, siendo en unas ocasiones favorables a Preescolar y en otras a EGB. En los siguientes gráficos podemos ver el contraste del porcentaje de éxito obtenido por uno y otro grupo en los problemas planteados en las dos magnitudes del número:

Gráfico 6.1.37 : Problemas con números grandes

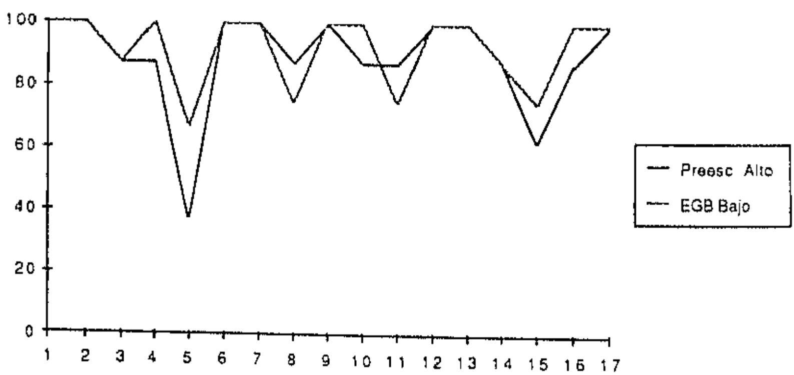
Porcentaje de respuestas correctas en los problemas con números grandes en Preescolar de rendimiento alto y EGB de rendimiento bajo



Puede apreciarse cómo se entrelazan ambas curvas, indicando un porcentaje de éxito muy semejante en ambos grupos, si bien las leves diferencias son favorables en casi todos los casos a EGB.

Gráfico 6.1.38: Problemas con números pequeños

Porcentaje de respuestas correctas en los problemas con números pequeños, en Preescolar de rendimiento alto y EGB de rendimiento bajo

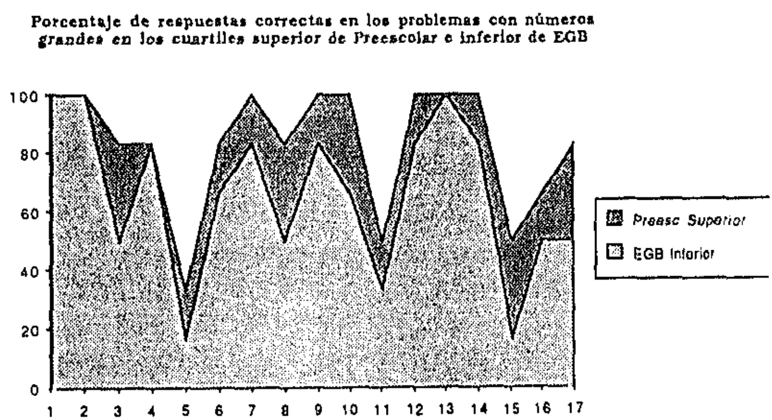


Cuando los problemas se plantean con números pequeños, los resultados son muy semejantes en ambos grupos, en unas ocasiones la diferencia es favorable al grupo de EGB y otras al de Preescolar. En ningún caso llegan a ser significativas. Cabe destacar la mayor dificultad del problema Cambio 5 para los más pequeños.

Los grupos de Preescolar y de EGB se equiparan, por tanto en los resultados obtenidos en los problemas cuando hacemos intervenir al mismo tiempo el rendimiento escolar y tenemos en cuenta sólo el nivel alto de los pequeños y el nivel bajo de los mayores.

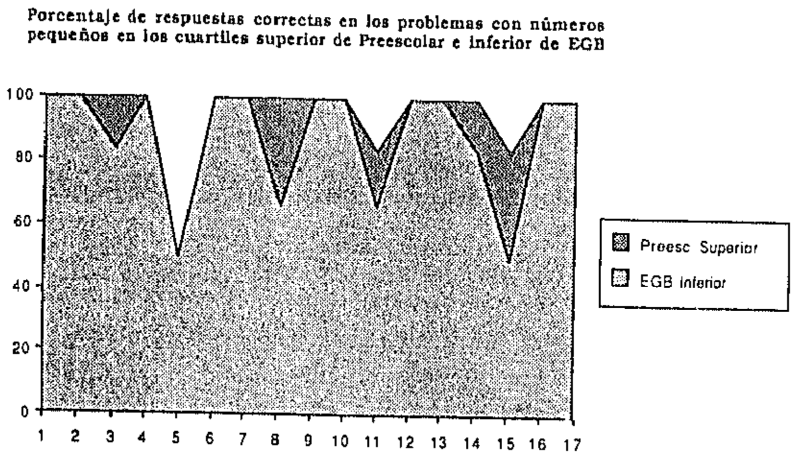
Por otra parte, cuando seleccionamos el cuartil superior de Preescolar y el cuartil inferior de EGB, en función de sus resultados en los problemas, nos encontramos **con una superioridad sistemática, aunque nunca significativa, en los preescolares**, incluso en los problemas con números grandes. Sea cual fuere el tamaño del número, el problema más discriminativo ha sido siempre **Igualación 4**, único problema en el que difieren de forma significativa los niños de alto y de bajo rendimiento en EGB. Los gráficos que presentamos a continuación muestran de forma clara unos porcentajes de éxito más elevados en el cuartil superior de Preescolar con respecto al cuartil inferior de EGB, que se hace más sorprendente cuando tenemos en cuenta el tamaño mayor del número:

Gráfico 6.1.39: Problemas con números grandes



El grupo de EGB sólo alcanza el total de respuestas correctas en los problemas *más fáciles* (Cambio 1 (1) y Cambio 2 (2), igualándose únicamente aquí con el grupo de Preescolar. En todos los demás problemas es manifiesta la superioridad de los más pequeños, aunque la diferencia sólo alcanza significatividad estadística en el problema Igualación 4.

Gráfico 6.1.40: Problemas con números pequeños



El grupo de Preescolar ha superado ya las dificultades en los problemas Cambio 3 (3) y Combinación 2 (8), en los que todavía encontramos fallos en el cuartil inferior de EGB. Los problemas Cambio 5 (5), Comparación 3 (11) e Igualación 4 (15) ofrecen todavía obstáculos en ambos grupos. Las diferencias encontradas son favorables al grupo de los más pequeños, y se localizan entre los problemas más difíciles.

El nivel de rendimiento ya sea valorado por el profesor o por la puntuación global alcanzada en los problemas se ha manifestado como una **variable muy influyente**, tanto, que **llega a compensar los efectos de la variable curso.** Los resultados son más llamativos cuando seleccionamos a los niños a partir de sus resultados en el conjunto de los problemas, llegándose a invertir el sentido de las diferencias. Hay que recordar que el grupo superior de Preescolar lo forman los dos mejores alumnos de 1º (Delia y Jorge) y cuatro de 2º de Preescolar, tres de los cuales valorados de rendimiento alto (Ana, Ricardo y Miguel) y uno de medio (Eduardo Mnez.). El grupo inferior de EGB lo constituyen los cuatro alumnos de nivel bajo y uno de nivel medio (Cristina) y uno de nivel bajo (Angel) en 2º de EGB.

Influencia de la etapa cognitiva en la solución de cada tipo de problemas.

En este apartado tratamos de examinar la relación de la etapa del desarrollo cognitivo con las distintas variedades de problemas estudiadas. Hemos visto ya, que alcanzar la etapa de madurez en las pruebas piagetianas no es una condición necesaria, ni tampoco suficiente, para obtener una buena puntuación en los problemas. Su importancia, como se recordará, se aprecia, sobre todo, en 1º de Preescolar, donde los niños con mejor puntuación son los más avanzados en su desarrollo cognitivo, y en 2º de EGB, donde los dos peores alumnos no han alcanzado todavía la etapa 3.

Sin embargo, puede ser que el haber alcanzado las nociones de Conservación, Seriación e Inclusión de clases no sea igualmente importante para la solución de los diversos problemas. Nos parece esencial saber qué problemas son los que están más estrechamente vinculados al nivel cognitivo, valorado a través de las pruebas piagetianas, en cada etapa escolar. Las tablas de contingencia que expresan la distribución de los sujetos en función de la solución a los distintos problemas y la etapa alcanzada en cada una de las nociones piagetianas, se incluyen en el anexo.

Conservación del número

Al realizar los cálculos a partir de los datos obtenidos en la muestra general nos encontramos con que de los diecisiete problemas con números grandes, once aparecen vinculados significativamente con la prueba de **Conservación del número**, descendiendo a cinco cuando se plantean esos mismos problemas con números pequeños. Los problemas relacionados de forma significativa con esta prueba piagetiana independientemente de cuál sea el tamaño del número son **Cambio 5, Comparación 3, Cambio 3, Combinación 2 e Igualación 4,** que, como se habrá notado, son los **más difíciles.**

Se aprecia ya en un primer momento que **la importancia de haber alcanzado la noción de Conservación no es la misma en todos los problemas descartándose que constituya un requisito para la solución de numerosos problemas sencillos de aritmética, sobre todo si se plantean con números pequeños.** Los niños son capaces de resolver éstos a una edad más temprana que la revelada por la tarea de Conservación y sin que haya mediado una instrucción formal.

Sin embargo, no nos podemos detener en estos resultados obtenidos en el conjunto de la muestra, ya que se confunde el efecto de la etapa cognitiva (medida en este caso a través de la prueba de Conservación del número), con otras variables vinculadas con la edad/curso (por ejemplo, la instrucción, conocimiento de los números...), magnificándose, por tanto, el peso de la primera. Por ello, hemos creído necesario analizar lo que ocurre en el interior de cada ciclo escolar y de cada curso.

En **Preescolar** sólo hay un alumno que supera la prueba de Conservación del número (Delia, de 1º de Preescolar). La puntuación total en los problemas ha sido muy alta pero al analizar cada problema en particular, encontramos que **siempre hay niños no conservadores que también lo resuelven y que incluso encuentran la solución en los tres que falla esta niña** cuando se le plantean con números grandes (dos niños en Cambio 5, tres en Comparación 3 y seis en Igualación 5).

Si consideramos sólo **1º de Preescolar**, encontramos la mayor relación con los problemas **Cambio 4, Cambio 6, Combinación 2, Igualación 4 e Igualación 6 con números grandes y Cambio 5 con números pequeños**. En todos ellos sólo hay dos niños que responden correctamente y uno de ellos es el conservador. Estos dos niños son los que en 1º de Preescolar conocen los números por encima de la decena. La habilidad para contar se muestra, por lo tanto, más importante en la solución de tales problemas que el hecho de haber alcanzado la conservación del número. Una mención especial merece el problema Cambio 5 (uno de los problemas más difíciles), que con números grandes sólo lo resuelve un niño no conservador (Jorge) y que demuestra el mayor dominio en el conteo

En **2º de Preescolar aumenta el número de niños que resuelven los problemas mencionados con números grandes, a pesar de no haber alcanzado ninguno de ellos la etapa 3 en Conservación**. Hay que resaltar la excepción que constituyen los problemas Igualación 4 y Cambio 5 cuyos índices de dificultad se manifiestan semejantes a los obtenidos en 1º, tanto en el caso de utilizar números grandes como de utilizar números pequeños. Podría ser que estos problemas fueran, por tanto, los más vinculados a la noción de Conservación, y por ello, los resultados en Preescolar, donde sólo hay un consevador, son tan pobres. Pero, por el mismo motivo, podrían también estar dependiendo del grado de instrucción. De todos modos hay que advertir su solución por niños no conservadores.y que no han recibido instrucción formal , sobre todo con el tamaño reducido del número.

De los 24 niños de **EGB** examinados, 14 han resuelto la tarea de Conservación del número, de los cuales, cinco son de 1º y nueve de 2º curso. El único problema que aparece vinculado de forma estadísticamente significativa a esta adquisición, es **Igualación 4** con **números grandes** (C = 0,497, equivalente a r = 0,838) De los 14 "conservadores" lo solucionan correctamente 13, mientras que de los 10 no conservadores sólo lo hacen 4. Sin embargo, estos cuatro niños ponen en cuestión la necesidad de haber alcanzado la noción de Conservación del número para solucionar este tipo de problemas más difíciles. Podemos relacionar este resultado con el encontrado por Bermejo y Rodríguez (1.987) acerca de la relación elevada (aunque no significativa), en el grupo de niños mayores de 1º de EGB, entre la conservación del número y los problemas de Igualación, si bien no especifican de qué tipo son éstos.

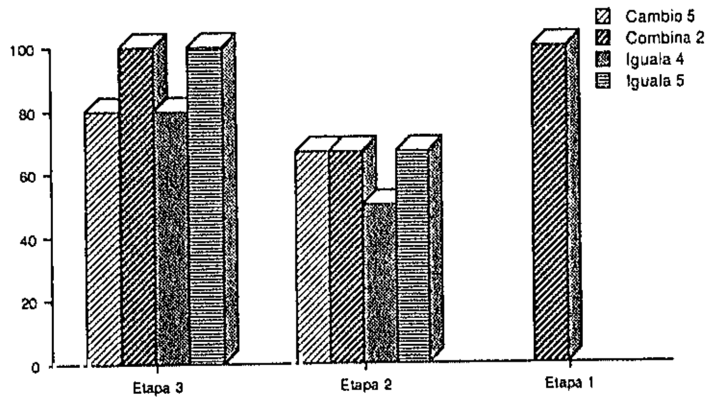
Es en **1º de EGB** donde la muestra se encuentra mejor repartida entre conservadores y no conservadores, por lo que los resultados hallados nos parecen los más indicativos de la posible relación existente entre la noción de conservación y la solución de los problemas. En este curso, la prueba de Conservación no aparece vinculada significativamente con ninguno de los problemas (p de Fisher>0,05)

A pesar de la capacidad ya generalizada para contar por encima del número 9, nos encontramos con dificultades dignas de destacar en los problemas Cambio 3, Cambio 5, Combinación 2, Comparación 3, Igualación 4, Igualación 5 e Igualación 6, que se manifiestan, excepto en estos dos últimos problemas, en los dos tamaños del número. Analizando la proporción de errores cometidos por conservadores y no conservadores, nos encontramos que **el mayor contraste** se encuentra en los problemas **Cambio 5** (falla un 20% de los conservadores y un 43% de los no conservadores), **Combinación 2** (0%/28%), **Igualación 4** (20%/57%) e **Igualación 5** (0%/43%).

Tabla 6.1.7: Resultado en los problemas en función de la etapa alcanzada en lel desarrollo de la noción de Conservación, en el curso de 1º de EGB

Problemas		Etapa 3	Etapa 2	Etapa 1
CAMBIO 5	Lo resuelven	4 (80%)	4 (66,67%)	0
	Fracasan	1 (20%)	2 (33,33%)	1 (100%)
COMBINACION 2	Lo resuelven	5 (100%)	4 (66,67%)	1 (100%)
	Fracasan	0	2 (33,33%)	0
IGUALACION 4	Lo resuelven	4 (80%)	3 (50%)	0
	Fracasan	1 (20%)	3 (50%)	1 (100%)
IGUALACION 5	Lo resuelven	5 (100%)	4 (66,67%)	0
	Fracasan	0	2 (33,33%)	1 (100%)

Gráfico 6.1.41: Representación del porcentaje de éxito en los problemas en función de los resultados en la tarea piagetiana de Conservación.



Los resultados obtenidos por los niños que se encuentran en la etapa 3 son mejores en todos los problemas. Sin embargo, numerosos niños que se encuentran en la etapa 3 alcanzan también la solución a los mismos, y el único niño de la etapa 1 resuelve el problema de Combinación 2

Hay que hacer notar, por otra parte, que es entre 2º de Preescolar y 1º de EGB donde se dá el **principal paso en la adquisición de la noción de Conservación** y es precisamente también donde aparecen como significativas las diferencias en los problemas **Cambio 5**, **Comparación 2** e **Igualación 4**. Como se ha indicado antes, el mayor progreso en los problemas al llegar a EGB se ha observado en Cambio 5.

A pesar de la mayor frecuencia de fracasos entre los no conservadores en los problemas así como del cambio importante que tiene lugar en algunos de ellos al mismo tiempo que se dá un avance importante en el dominio de la Conservación, la prueba de la probabilidad exacta de Fisher **no indica relación significativa entre esta noción y la solución de ninguno de los problemas aritméticos de enunciado verbal.**

En **2º de EGB**, se encuentran únicamente fallos en los problemas **Cambio 5, Cambio 6, Combinación 2, Igualación 4** e **Igualación 6**, siempre con números grandes, y, excepto en este último caso, proceden de los **dos niños no conservadores** de **nivel de rendimiento bajo** (Angel y Paula). El problema que aparece más relacionado con la tarea de Conservación es **Igualación 4**, en el que fallan los dos alumnos mencionados. La prueba de Fisher indica que tal relación es estadísticamente significativa (p = 0,045). Pero también aquí debemos tener en cuenta al tercero de los no conservadores en este curso (Fdo.Salvador), que valorado de rendimiento alto por su profesor, resuelve la totalidad de los problemas.

En todos los cursos, por tanto, hay **más proporción de no conservadores que fallan en los problemas más difíciles y con números grandes**, destacando el problema Igualación 4 (C = 0,577, equivalente a r = 0,903 en la muestra global), sobre todo en el curso más avanzado, donde la relación, como acabamos de ver, también llega a ser significativa. Sin embargo, siempre hay no conservadores que los solucionan y el hecho de ser conservador tampoco ha resultado ser una garantía para conseguir la respuesta correcta. Una excepción de esto último lo constituye el problema Combinación 2 que todos los conservadores lo resuelven bien pero que también lo hace una proporción importante de no conservadores (9,09% en 1º de Preescolar, 50% en 2º, 71% y 100% en 1º y 2º de EGB respectivamente).

Con todo esto, parece que **no es necesario llegar a la noción de Conservación para conseguir el éxito en algún problema en particular, y, por otra parte, la conservación del número no conduce, por sí misma a la solución correcta de todo tipo de problemas aritméticos de enunciado verbal.**

Nuestra interpretación es que esta tarea piagetiana y los problemas verbales constituyen formas distintas de valorar el razonamiento numérico de los niños, dependiendo ambas de la capacidad de razonar lógicamente. Siendo la primera más exigente, llega a dominarse más tarde. Los problemas más difíciles, que suponen la comprensión de relaciones semánticas complejas, requieren un nivel de razonamiento lógico semejante al supuesto por la tarea de Conservación, apareciendo, por ello, las relaciones mencionadas (que sólo alcanzan significatividad estadística en la muestra global y en un caso concreto en 2º de EGB) Es decir, a la vista de los datos, la Conservación no parece ser un requisito para manejar números y resolver problemas aritméticos. Su vinculación con los problemas más difíciles no hace sino reflejar sus raíces en una capacidad más general como es la capacidad de razonamiento lógico.

Inclusión de clases

Por lo que se refiere a la prueba de **Inclusión de clases**, en la muestra general aparece significativamente relacionada con 9 de los 17 problemas planteados a los niños con números grandes (relacionados también con Conservación), y sólo con dos al reducir el tamaño de los números. Los problemas **Cambio 5 y Comparación 3** están vinculados de forma significativa con el concepto de Inclusión en los dos tamaños del número.

En **Preescolar**, el haber alcanzado la etapa 3 en esta prueba piagetiana no nos predice una mayor probabilidad de resolver determinado tipo de problemas. Si consideramos únicamente a **1º de Preescolar**, aparece relación significativa entre la tarea de Inclusión y los problemas **Combinación 1 y Comparación 2** con números grandes (dos de los tres niños que lo resuelven son los que están en la tercera etapa de Inclusión). En 2º de Preescolar desaparece tal relación

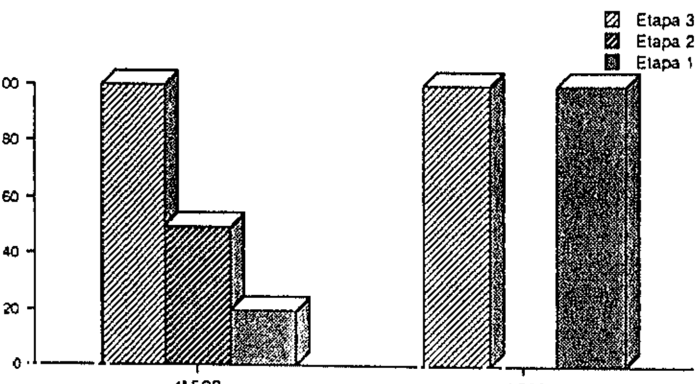
El paso decisivo en la adquisición del concepto de Inclusión de clases tiene lugar entre **1º y 2º de EGB** (la diferencia es altamente significativa). Hemos de resaltar el importante avance que ocurre al mismo tiempo en la solución del problema **Comparación 3 con números grandes**, único problema que aparece significativamente relacionado con la prueba de Inclusión, aplicando la prueba ji-cuadrado al conjunto de la muestra de EGB. Sin embargo, al haber sólo un niño de 1º y 11 de

2º entre los que han superado tal prueba, no parece que este resultado pueda tenerse en cuenta, ya que queda intoxicado por el efecto de la variable curso. En efecto, se observa un aumento progresivo de respuestas correctas conforme avanzamos en cursos escolares de modo que incluso el único niño de 2º de EGB que todavía no tiene afianzado este concepto, realiza bien el problema y también lo hacen 4 niños de 1º a pesar de encontrarse también en esa situación. Podemos observar estos resultados en la siguiente tabla:

Tabla 6.1.8: Relación entre la solución al problema Comparación 3 y el resultado en la tarea de Inclusión de clases en los dos cursos de EGB

Curso		Etapa 3	Etapa 2	Etapa 1
1º de EGB	Lo resuelven	1 (100%)	3 (50%)	1 (20%)
	Fracasan	0	3 (50%)	4 (80%)
2º de EGB	Lo resuelven	10 (100%)	1 (100%)	1 (100%)
	Fracasan	0	0	0

Gráfico 6.1.42: Representación del resultado en el problema Comparación 3 en función de la etapa en el desarrollo de la noción de Inclusión de clases.



En 1º de EGB se observa una progresión clara en la resolución del problema Comparación 3 a medida que avanzamos en la etapa de Inclusión. Sin embargo, en 2º de EGB, todos los niños llegan a resolver el problema, a pesar de no haber conseguido la etapa 3.

Por lo tanto, podemos indicar también aquí que las relaciones observadas entre la prueba piagetiana y la solución al problema mencionado no son, a nuestro parecer, causales, sino que reflejan su común dependencia de la capacidad de razonar con lógica.

Seriación

Los resultados en la tarea piagetiana de **Seriación** se vinculan significativamente, en la muestra global, con seis problemas que utilizan números grandes (relacionados asimismo con Inclusión y Conservación). Si disminuimos el tamaño de los números, la relación se reduce a dos problemas : **Combinación 2 y Cambio 5.**

La mayor relación de esta prueba con los resultados en los problemas, se observa en **1º de Preescolar**, donde la p de Fisher indica significatividad con **Cambio 3, Cambio 4, Cambio 6, Combinación 2 e Igualación 3 con números grandes y con Cambio 5 y Combinación 2 con números pequeños**. Si tenemos en cuenta el grupo entero de **Preescolar**, la vinculación significativa se reduce a los problemas **Cambio 3** con números grandes y **Combinación 2** con números pequeños, ya que en 2º de Preescolar hay más niños que, sin superar la prueba de Seriación llegan a resolver los problemas mencionados anteriormente. De los seis preescolares que alcanzan la etapa 3, todos solucionan bien el problema Combinación 2 con números pequeños (pero hay 6 respuestas correctas de niños que no son capaces de la seriación lógica) y sólo falla uno en Cambio 3 con números grandes (que, en cambio, resuelven tres que no han llegado a la etapa3).

En **EGB**, el problema que se muestra más relacionado con la prueba de Seriación ha sido **Cambio 5** (la p de Fisher llega a ser significativa). Este problema lo fallan 5 de los 13 niños que no resuelven la tarea de Seriación, mientras que todos los que han conseguido en ella la etapa 3, encuentran la solución correcta. La relación se diluye, sin embargo, si consideramos los dos cursos de EGB aisladamente.

En ningún caso nos encontramos, por tanto, que la prueba piagetiana de Seriación constituya un requisito para solucionar algún tipo de problemas, aunque se da una mayor probabilidad de que los que han alcanzado la etapa 3, resuelvan correctamente los problemas Cambio 3 (nºgrandes) y Combinación 2 (nºpequeños) en Preescolar y Cambio 5 (nº grandes) en EGB.

Relación entre la comprensión de los principios básicos de la aritmética y la resolución de cada tipo de problemas.

Hemos comentado ya la importancia que tiene el conocimiento explícito de las distintas propiedades de la aritmética, para la resolución de problemas. El haber alcanzado o no la etapa 3 en cada una de ellas, marca diferencias significativas en la puntuación total obtenida en los problemas, incluso si estos se plantean con números pequeños (excepto en el caso de la Asociatividad), tanto en la muestra total como en EGB. En Preescolar, la relación alcanza sólo significatividad estadística en el caso de Inferencia y Conmutatividad sea cual sea el tamaño de los números utilizados en los problemas y en el caso de Compensación sólo con números grandes. Podemos decir que, en general, todos los alumnos que han obtenido la puntuación máxima en los problemas con números grandes, se hallan en la etapa 3 de Inferencia y Conmutatividad.

Veamos en este momento si los resultados obtenidos en las tareas de las propiedades aritméticas, se vinculan significativamente a la solución de algún problema en particular (como se recordará, en este estudio hemos utilizado los estadísticos ji-cuadrado y Coeficiente de Contingencia). Es decir, se trata de comprobar si el conocimiento explícito de los principios subyacentes a la adición y sustracción, es igualmente necesario para resolver todo tipo de problemas. Desde un primer momento debemos destacar que los problemas más vinculados a la comprensión de las propiedades aritméticas son los que utilizan números grandes, y que los niños son capaces de resolver muchos de los problemas con números pequeños, sin que tales propiedades hayan llegado a ser algo evidente para ellos.

Por lo que se refiere a los resultados en **Inferencia**, si tenemos en cuenta la **muestra global**, encontramos **relación significativa con todos y cada uno de los problemas con números grandes** y con la práctica totalidad de los que utilizan números pequeños. Sin embargo, si analizamos lo que ocurre en el interior de cada ciclo escolar, obtenemos lo siguiente:

- En **EGB**, cabe destacar que el dar una respuesta cuantitativa en la tarea de Inferencia **parece indispensable tan sólo para resolver los problemas Cambio 3, Cambio 5, Comparación 2, Comparación 3 e Igualación 4 con números grandes y Cambio 5, Comparación 1 e Igualación 4 con números pequeños**. En todos los demás, al menos uno de los dos niños que no han alcanzado la etapa 3 en Inferencia, da la respuesta correcta. No obstante, en Comparación 3 e Igualación 4 con números grandes, no se alcanza significatividad estadística porque hay niños que, a pesar de haber llegado a la etapa 3, no los resuelven.

- En **Preescolar**, la etapa 3 en Inferencia se ha mostrado como **condición necesaria** para resolver seis de los problemas con números grandes: **Cambio 3, Cambio 5, Cambio 6, Comparación 3, Igualación 4 e Igualación 5 con números grandes y Cambio 5 con números pequeños**: ninguno de los 10 preescolares que no han llegado a la etapa 3, llega a solucionarlos. Sin embargo, también hallamos una proporción destacada de niños que, encontrándose en la etapa 3, no soluciona Cambio 5, Comparación 3, Igualación 4 e Igualación 5, por lo que en estos casos ji-cuadrado no alcanza significatividad estadística.

La Inferencia de la operación (dando una respuesta cuantitativa) parece condición necesaria, aunque no suficiente, para resolver los problemas **Cambio 3, Cambio5, Comparación 3 e Igualación 4**, cuando se plantean con **números grandes**, y en el caso de **Cambio 5**, también con **números pequeños.**

Los resultados de la tarea sobre la **propiedad Conmutativa** están **vinculados significativamente** con los obtenidos en cada uno de los **problemas con números grandes**, en la **muestra total**. En **EGB**, esta propiedad es la que se relaciona significativamente con mayor número de problemas (los más difíciles). Sin embargo, analizando las tablas de Contingencia (ver anexo), encontramos que **la comprensión de esta propiedad** (manifestada a través de nuestra prueba), **no se muestra como requisito indispensable para solucionar ninguno de los problemas**; el caso más extremo se da en los tres más difíciles (**Cambio 5**, **Comparación 3** e **Igualación 4**), donde sólo hallamos 2 niños que llegan a resolverlos, de los 22 que no dan muestras de una comprensión de la Conmutatividad -uno de Preescolar y otro de EGB- (pero también es donde la proporción de fracaso de los que están en la tercera etapa es mayor). Es decir, se observa también de forma clara, la **insuficiencia de haber alcanzado la etapa 3 en Conmutatividad para resolver los problemas más difíciles.** Entre los preescolares, la Conmutatividad se relaciona significativamente con problemas de niveles inferiores en la escala de dificultad, cuando se plantean con números grandes (Cambio 1, Cambio 2, Cambio 4, Combinación 1, Cambio 6, Comparación 2 e Igualación 6) y con problemas difíciles con números pequeños (Comparación 3).

Como se recordará, la prueba de la **Asociatividad** ha resultado muy difícil incluso entre los mayores, de modo que el alcanzar la etapa 3 **no se ha mostrado como requisito para resolver ningún tipo de problemas.** No obstante, presenta **vinculación altamente significativa con los problemas más difíciles con números grandes**: Igualación 4, Cambio 5 y Comparación 3, cuando consideramos la muestra global y con **Igualación 4 en EGB**, donde, además, se alcanza significatividad con **Cambio 5** (todos los niños que están en la etapa 3 de Asociatividad, resuelven bien estos problemas, pero no todos los que los resuelven están en la etapa 3 de Asociatividad). En Preescolar sólo hallamos una niña en la etapa 3 y las tablas no muestran contingencia entre esta propiedad y la resolución de problemas. No parece, por lo tanto, que la vinculación observada entre los resultados en Asociatividad y en los problemas más difíciles con números grandes expresen una relación de dependencia, sino una capacidad común de pensar con lógica, siendo más exigente la prueba de Asociatividad, seguramente porque su solución supone sobreponerse a la información perceptiva.

Los resultados en **Inversión** y en **Compensación** han sido muy semejantes. Encontramos coincidencia en 43 de los 48 niños estudiados. De los 5 en los que hay desfase, 3 resuelven bien Inversión y no Compensación y 2 al contrario. El problema más estrechamente relacionado con ambas pruebas es el de **Igualación 4**, seguido de **Cambio 5**, en los dos casos con **números grandes**, tanto si tenemos en cuenta los resultados en la **muestra global** como en **EGB**. En este curso, todos los alumnos que se encuentran en la etapa 3 de Inversión y de Compensación, resuelven ambos problemas, mientras que sólo resuelve Igualación 4 el 36,4% y el 41,67% de los que no han llegado a la etapa 3 en Inversión y Compensación respectivamente y tan sólo soluciona Cambio 5, el 54,5% y el 58,33% de los que no han llegado a la etapa 3 de estas mismas propiedades de la aritmética, respectivamente. En **Preescolar** sólo son cuatro los niños que han llegado a la etapa 3 en estas pruebas; en Inversión no puede rechazarse en ningún caso la hipótesis nula al aplicar ji-cuadrado, pero en el caso de **Compensación** encontramos de nuevo relación significativa con **Cambio 5** e **Igualación 4** con números grandes y, además con **Combinación 2** en este mismo tamaño del número, así como con **Cambio 5 con números pequeños** (sólo falla uno de los cuatro niños que están en la etapa 3 de Compensación, mientras que lo hacen los 20 que todavía no han llegado a ella).

Hemos de destacar, por lo tanto, la **estrecha relación** de estas dos propiedades de la aritmética con **dos de los problemas más difíciles**, concretamente con los que comparten la característica de **comenzar con un dato desconocido**. A pesar de esta vinculación significativa, encontramos en uno y otro, una proporción de niños que, sin haber alcanzado la etapa 3 en Inversión o/y en Compensación, resuelven tales problemas. Es decir, podemos afirmar, también en este caso, que **el haber alcanzado un nivel maduro en la comprensión de estas propiedades, no constituye un requisito para solucionar ninguno de los problemas planteados, ni siquiera los más difíciles cuando se plantean**

con números grandes. Sin embargo, en EGB se cumple que todos los que han alcanzado la etapa 3 en las mencionadas propiedades, resuelven bien la totalidad de los problemas.

Resumiendo, podemos concluir afirmando que sólo se ha mostrado como **requisito para solucionar** determinados **problemas aritméticos** de enunciado verbal (aquéllos que se encuentran entre los **más difíciles**), la capacidad de **inferir la operación realizada, dando una respuesta cuantitativa**. Sin embargo, **aunque se trate de una condición necesaria, no lo es suficiente**, ya que una importante proporción de niños que manifiestan tal capacidad, no resuelven los mencionados problemas.

Es éste **el principio de la aritmética más ampliamente vinculado** con los problemas en **Preescolar**. Con respecto al conjunto de las propiedades, podemos decir esquemáticamente que, en estos cursos, la vinculación se presenta con **problemas situados en los niveles de menor dificultad con números grandes o con problemas de dificultad media y elevada con números pequeños**. En muchos de ellos, **la comprensión explícita de las mismas se manifiesta como condición suficiente para su resolución correcta**; sin embargo, en ningún problema se muestra como condición necesaria: siempre nos encontramos niños que son capaces de solucionarlos sin haber llegado a la etapa 3.

En **EGB**, la propiedad de la aritmética que se vincula significativamente con mayor número de problemas es la de **Conmutatividad**. En general, cabe destacar que **los problemas que presentan una relación más estrecha con las propiedades aritméticas** en este curso son **los más difíciles y cuando se presentan con números grandes** (sobre todo Cambio 5 e Igualación 4). Por otra parte, el haber alcanzado un nivel maduro en Asociatividad, Inversión y Compensación, se ha mostrado, en EGB, como **condición suficiente, aunque no necesaria** para resolver tales problemas. La Conmutatividad, a pesar de su estrecha vinculación con ellos, no se ha mostrado ni necesaria ni suficiente. Trataremos de analizar más adelante cómo resuelven estos problemas los niños para los que no es evidente esta propiedad básica de la aritmética.

ABRIR CONTINUACIÓN CAP. 6 (T.I)