



**L**ICENCIATURA EN ADMINISTRACIÓN

**A**PUNTES  
PARA LA ASIGNATURA  
**MATEMÁTICAS BÁSICAS**



**Fondo Editorial**

**F C A**

2005



## Colaboradores

### **Coordinación general**

L.A.C. y Mtra. Gabriela Montero Montiel

### **Coordinación académica**

### **Coordinación operativa**

L.A.C. Francisco Hernández Mendoza

### **Asesoría pedagógica**

Lic. Sandra Rocha

### **Corrección de estilo**

L.F. José Alfredo Escobar Mellado

### **Edición**

L.A. José Mario Hernández Juárez

### **Captura**

Beatriz Ledesma Espíndola  
Israel Morales Herrera



## Prólogo

Como una labor editorial más de la Facultad de Contaduría y Administración, los materiales educativos que conforman el Paquete de Estudio Autodirigido del Sistema Universidad Abierta representan un esfuerzo encauzado a apoyar el aprendizaje de los estudiantes de este sistema.

Esperamos que estos materiales sirvan de punto de referencia tanto a los asesores como a los alumnos. A los primeros para que tengan medios que les permitan orientar de mejor manera y con mayor sencillez a sus estudiantes. Y a los segundos para que cuenten con elementos para organizar su programa de trabajo, se les facilite comprender los objetivos de cada asignatura y se sirvan de los apoyos educativos que contienen, como los esbozos de las materias y sus unidades, cuestionarios de autoevaluación, lecturas básicas de estudio, actividades de aprendizaje y apuntes elaborados por los asesores.

Así, ponemos estos materiales a disposición de nuestra comunidad, esperando que alcancen sus propósitos.

**ATENTAMENTE**

Ciudad Universitaria, D. F., octubre de 2005

**C.P.C. Y MAESTRO ARTURO DÍAZ ALONSO**

**DIRECTOR**



Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio, sin autorización escrita del editor.



## APUNTES PARA LA ASIGNATURA DE MATEMÁTICAS BÁSICAS

Primera edición, octubre, 2005

Derechos reservados conforme a la ley.

Prohibida la reproducción parcial o total de la presente obra por cualquier medio, sin permiso escrito del editor.

DR © 2005 Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Contaduría y Administración

Fondo Editorial FCA

Circuito Exterior de Ciudad Universitaria,

Deleg. Coyoacán, 04510-México, D.F.

Impreso y hecho en México



# Contenido

Introducción .....	7
Objetivos generales de la asignatura .....	9
Unidad 1. Álgebra .....	11
Objetivos particulares de la unidad .....	13
Apunte .....	15
Unidad 2. Matrices .....	45
Objetivos particulares de la unidad .....	47
Apunte .....	49
Unidad 3. Cálculo diferencial .....	65
Objetivos particulares de la unidad .....	67
Apunte .....	69
Unidad 4. Cálculo integral .....	95
Objetivos particulares de la unidad .....	97
Apunte .....	99
Bibliografía .....	115





## Introducción

El propósito de estos apuntes es apoyarte en el estudio independiente de **Matemáticas Básicas**, ya que en este sistema debes preparar cada una de las asignaturas del plan de estudios por tu cuenta, en el tiempo y lugar que tengas disponibles.

Este material forma parte del paquete de estudio autodirigido de la asignatura y es una exposición sistematizada y resumida de cada unidad que contiene, acompañada de ejercicios desarrollados paso a paso, así como problemas de aplicación. Su función es permitirte reafirmar o completar, a través del estudio de las lecturas básicas, la comprensión de algún tema que no hayas entendido plenamente.

En primer lugar, se te propone revisar con cuidado la guía de estudio para que tengas un panorama general de la asignatura. Después, estudiar los temas de cada unidad en las lecturas recomendadas. Luego, repasar el contenido en los apuntes y resolver el cuestionario de autoevaluación (guía de estudio). Finalmente, trabajar con el cuaderno de actividades y resolver los exámenes.

Ten a la mano las herramientas necesarias: lápiz, hojas, cuaderno de actividades de la asignatura y calculadora electrónica, ya que con ésta se resuelven algunas operaciones de manera más segura y fácil.

Si al autoevaluarte no te sientes satisfecho con los resultados obtenidos, revisa de nuevo todo el material hasta que alcances los objetivos. Ante cualquier duda, puedes consultar a tu asesor de manera presencial o en línea.





## Objetivos generales de la asignatura

Como resultado del aprendizaje que alcanzarás gradualmente de la asignatura, serás capaz de integrar los tópicos del álgebra y cálculo diferencial e integral en la interpretación y resolución de modelos matemáticos.





## Unidad 1. Álgebra

- 1.1. Conjuntos
- 1.2. Números reales
- 1.3. Funciones matemáticas
- 1.4. Ecuaciones lineales y cuadráticas
- 1.5. Inecuaciones lineales y cuadráticas





## Objetivos particulares de la unidad

Al culminar el aprendizaje de la unidad, lograrás resolver correctamente operaciones algebraicas y establecer relaciones entre los conjuntos y sus elementos. Asimismo, serás capaz de solucionar problemas de ecuaciones y desigualdades lineales y cuadráticas en una o más variables utilizando diferentes métodos; y construir gráficas de algunas funciones del área económico-administrativa.





## 1.1. Conjuntos

### Antecedentes

La teoría de conjuntos es un sistema formal de las matemáticas que proporciona herramientas para estructurar conceptos útiles dentro de esta disciplina. Se compone de algunas ideas básicas, definiciones y operaciones, a partir de las cuales podemos desarrollar y probar teoremas, o resolver problemas teóricos y prácticos. Aunque aparece relativamente tarde (sus nociones básicas son establecidas por George Boole –s. XIX– y Georg Cantor –segunda mitad del s. XIX y principios del XX–), ha incidido en todas las ramas de las matemáticas. Por ello iniciamos el curso estudiando las nociones fundamentales de conjuntos. Además, así comprenderemos mejor los temas posteriores.

### Noción intuitiva de conjunto

Un conjunto es una **colección de objetos de cualquier índole, que pueden o no estar relacionados entre sí**. Debe tener las características siguientes:

- ❑ **Definir claramente la colección de objetos.** Podemos contestar de manera inequívoca si un objeto “ $x$ ” pertenece a la colección: la respuesta debe ser “sí” o “no”, nunca “tal vez” o “no sé”.
- ❑ **Cada objeto debe contarse una sola vez.** Por ejemplo, la palabra anagrama, puesta como conjunto, tiene cinco elementos:  $a, n, g, r$  y  $m$ .
- ❑ **El orden en el que se mencionan los objetos no tiene importancia:** el conjunto  $p, q, r$  es el mismo que el conjunto  $r, p, q$ .

Los conjuntos pueden ser colecciones de **objetos reales** (reloj, libro de matemáticas, calculadora...) o **ideales** (números o personajes de novelas); **finitos** (los libros de la biblioteca de la FCA), cuando pueden listarse todos los objetos que lo forman, o **infinitos** (los puntos de una recta), cuando no pueden listarse sus componentes.



## Notación

Es indispensable una serie de símbolos que nos permitan manejarnos con soltura en el mundo de los conjuntos, para ahorrar tiempo y evitar palabras engorrosas o confusas. Por eso, a los conjuntos **se les denota con letras mayúsculas**. Podemos decir, por ejemplo, que el conjunto  $A$  es el de las cinco vocales del alfabeto castellano; o que el  $B$  es el de los once jugadores que alinearon por el equipo de Francia al inicio de la final de la copa del mundo de 1998.

Los objetos que forman parte de un conjunto se dice que **pertenecen a ese conjunto**, y se denotan con **letras minúsculas**. Si los objetos  $p$ ,  $q$ ,  $r$  son los únicos que forman el conjunto  $E$ , afirmamos que  $p$ ,  $q$  y  $r$  pertenecen al conjunto  $E$ ; o que  $a$  no pertenece al conjunto  $E$ . Los objetos que integran un conjunto los denominamos **elementos de ese conjunto**; por eso, podemos decir que  $p$ ,  $q$  y  $r$  son elementos de  $E$ ; o que  $p$ ,  $q$  y  $r$  pertenecen a  $E$ , o viceversa.

**La relación de pertenencia** de un elemento a un conjunto la designamos con el símbolo  $\in$ ; y la de **no pertenencia**, con  $\notin$ . Luego, las relaciones de un elemento a un conjunto, mencionadas en el párrafo anterior, pueden expresarse así:

$a \in A$  (indica que  $a$  pertenece al conjunto  $A$ )

$b \notin A$  (señala que  $b$  no pertenece al conjunto  $A$ )

A los elementos de un conjunto se les encierra entre llaves:

$E = \{a, b, c\}$  (expresa que el conjunto  $E$  **está compuesto** por los elementos  $a, b$  y  $c$ )

## Conjuntos especiales

**Conjunto universal** Para revisar determinados fenómenos o situaciones, **hay un marco de referencia que incluye todos los elementos a analizar**. Por ejemplo, si consideramos a los estudiantes de Contaduría de México, el listado de todos los alumnos de esta carrera inscritos en todas las universidades del país es nuestro marco de referencia o conjunto universal (lo denotamos con la letra **U** [algunos libros utilizan la grafía griega  $\Omega$ ]). Sin embargo, el conjunto universal no es único, depende del fenómeno que estemos revisando y de la situación particular que enfrentemos.



**Conjunto vacío** **No tiene elementos.** Puede parecer extraño un conjunto así, pero es útil conocerlo para comprender otros conceptos.

Se denota con la letra griega  $\emptyset$

Entre los conjuntos especiales, están los siguientes:

**De los números naturales** Sirven para contar (1,2,3,4,5...). Se representan con la letra **N**.

**De los números enteros** Incluyen los naturales, naturales con signo negativo y al cero (...-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5...). Se expresan con la **Z**.

**De los números racionales** Se pueden señalar como la división o razón entre dos enteros, como  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{156}{956}$ , 3, etcétera. Se representan con la **Q**.

**De los números irracionales** No pueden representarse como la división o razón de dos enteros, como la raíz cuadrada de 2, Pi, etcétera. Se denotan con la grafía **Q**.

**De los números reales** Formado con la unión de números racionales e irracionales. Se representa con la **R**.

### Dos maneras de definir conjuntos

1. Listando todos los elementos y encerrándolos entre llaves:

$$A = \{a, e, i, o, u\}; \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2. Describiendo dentro de las llaves una definición que manifieste con claridad las características que debe tener un elemento para pertenecer a cualquier conjunto dado:

$$A = \{x \mid x \text{ es una vocal del alfabeto castellano}\}$$

$$B = \{z \mid z \text{ es uno de los primeros seis números naturales}\}$$

La simbología puede leerse así:

A es un conjunto de elementos "x" tales que "x" es una vocal del alfabeto castellano.

B es un conjunto de elementos "z" tales que "z" es uno de los primeros seis números naturales.



## Comparaciones entre conjuntos

**Igualdad y desigualdad.** Dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen exactamente los mismos elementos (no importa el orden en que estén dispuestos). Y **son desiguales** si al menos alguno de los componentes de uno no está en el otro. En simbología de conjuntos, si queremos indicar que A y B son iguales, lo podemos expresar así: para todo  $a \in A$ ,  $a \in B$  y para todo  $b \in B$ ,  $b \in A$ . Si se cumplen ambas condiciones,  $A=B$ ; en caso contrario, no.

**Inclusión, subconjuntos.** Si tenemos dos conjuntos cualesquiera, A y B, puede suceder que **todos y cada uno de los elementos de uno pertenezcan al otro**. Si es el caso, decimos que A está incluido en B, o A es subconjunto de B. Eso lo indicamos en la notación de conjuntos con el símbolo  $\subset$ . Así, tenemos que  $A \subset B$ . Por ejemplo, si denotamos como A al conjunto de vocales y como C al de las letras del alfabeto castellano, A es subconjunto de C: si  $A = \{x|x \text{ es una vocal del alfabeto castellano}\}$  y  $C = \{x|x \text{ es una letra del alfabeto castellano}\}$ , entonces  $A \subset C$ .

De la definición de inclusión puede derivarse la de **igualdad**: si para dos conjuntos cualesquiera, A y B, afirmamos que  $A \subset B$  y  $B \subset A$ , entonces A y B son iguales. O si  $A=A$ , entonces A es subconjunto de sí mismo.

**Conjuntos disjuntos.** Se denominan así cuando **no tienen ningún elemento en común**. Si C, por ejemplo, es el conjunto de los números pares, y D el de los nones, ambos son disjuntos: no comparten ningún elemento.

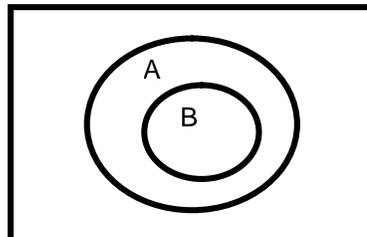
**Conjuntos no comparables.** Cuando dos conjuntos **no son iguales** ninguno es subconjunto del otro, y tampoco son disjuntos: si  $A = \{a, b, c, d, e\}$  y  $B = \{a, b, f, g, h, i, j\}$ , entonces A y B son conjuntos no comparables.



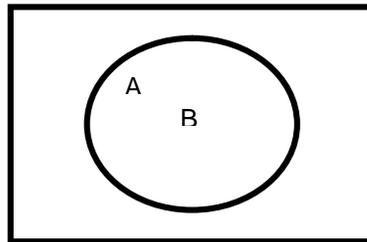
## Diagramas de Venn-Euler

Estos diagramas son el medio para **representar gráficamente operaciones y relaciones entre conjuntos**. Aquí, el conjunto universal se representa, comúnmente, con un rectángulo; y los conjuntos particulares, por círculos dentro de ese rectángulo.

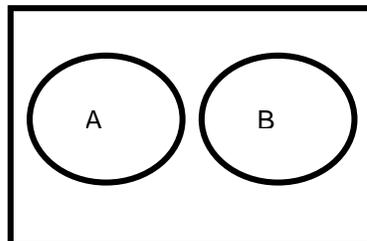
Con diagramas de Venn, describimos a continuación las relaciones entre conjuntos que vimos en la sección anterior.



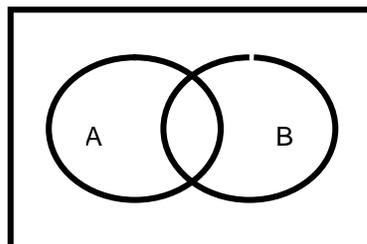
$$B \subset A$$



$$A = B$$



Conjuntos disjuntos



Conjuntos no comparables

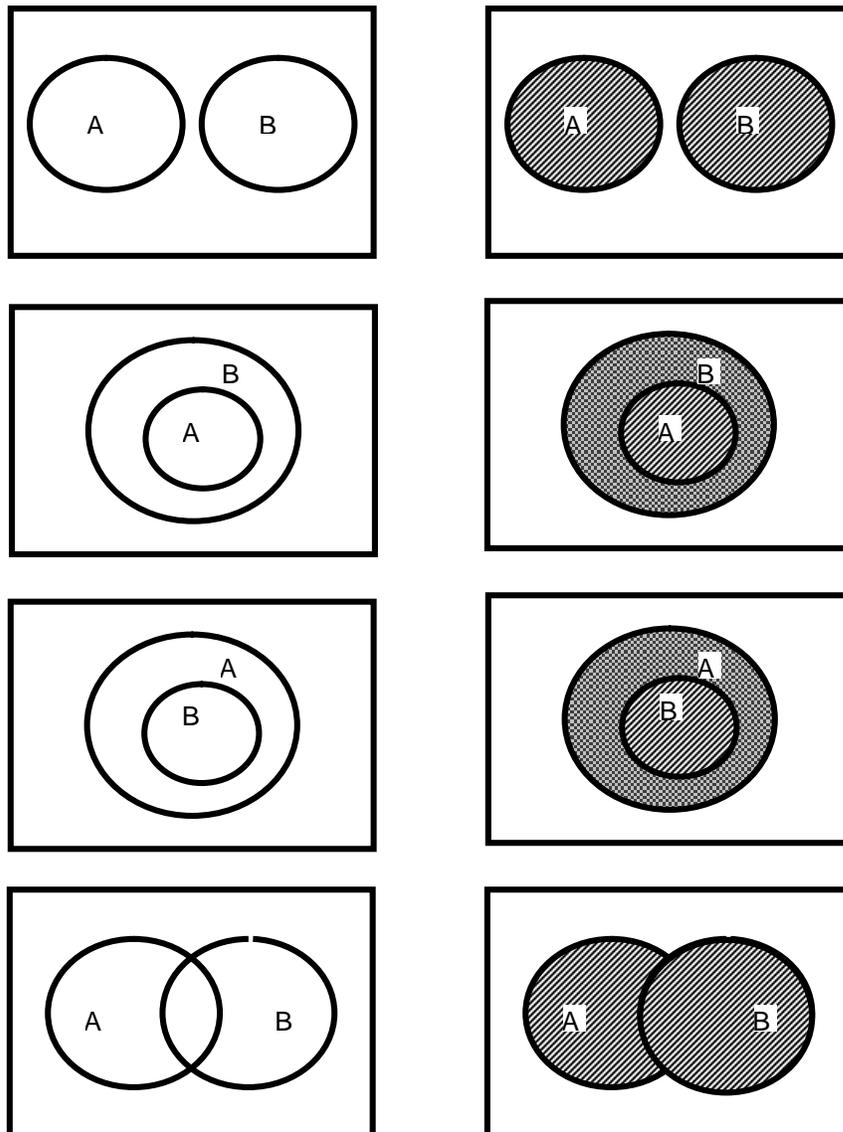


## Operaciones con conjuntos

**Unión.** Es una operación entre dos o más conjuntos, mediante la cual se genera otro conjunto que **tiene todos los elementos que pertenecían por lo menos a uno de los originales**. En simbología de conjuntos, se denota mediante el símbolo  $\cup$ . La podemos expresar así:  $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$

Ejemplo:  $A = \{a, b, c, d, e\}$  y  $B = \{a, b, f, g, h, i, j\}$ ;  $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$

Frecuentemente, se identifica a la operación de unión con la letra **o**. Podemos pensar, por ejemplo, en un establecimiento al que pueden entrar las personas que se acrediten con cartilla "o" credencial de elector (desde luego, quienes posean ambos documentos también podrán acceder). Damos algunos casos, con diagramas de Venn, de las **posibilidades de unión** (los conjuntos considerados individualmente se muestran a la izquierda y su unión se identifica, con sombreado, a la derecha):



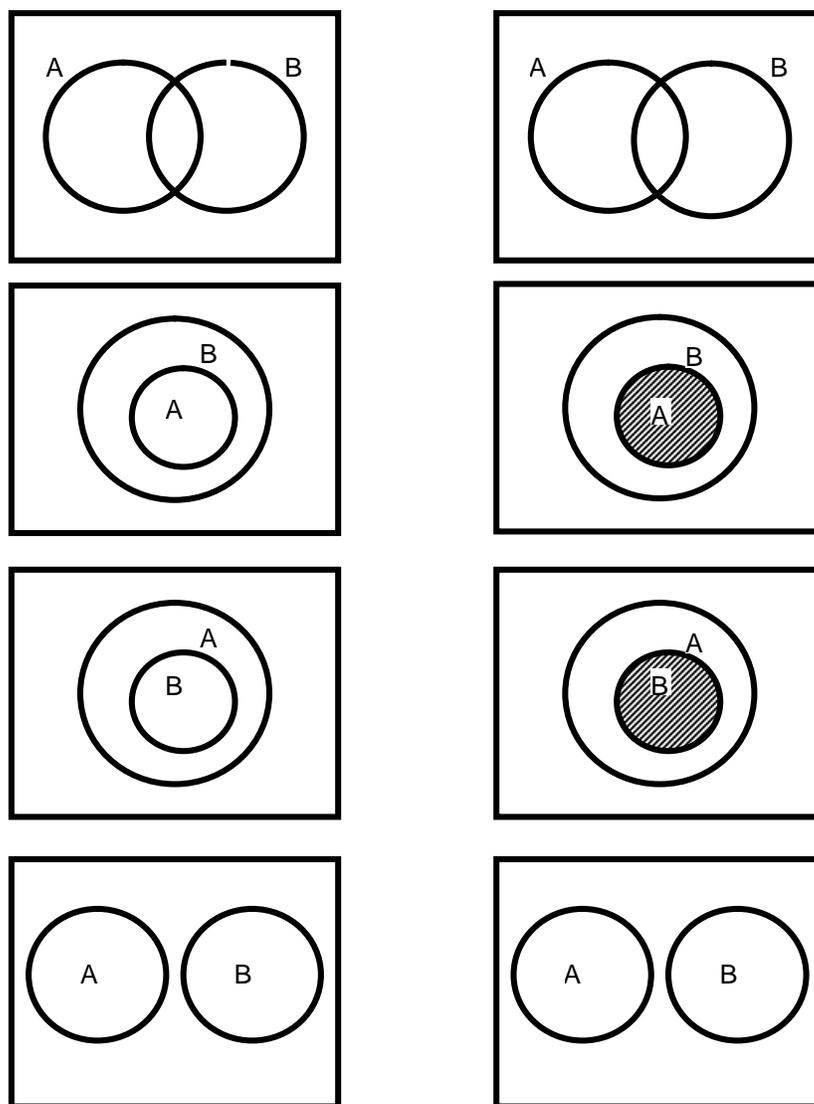


**Intersección.** Operación entre dos o más conjuntos, mediante la cual se genera otro que **tiene todos los elementos que pertenecían simultáneamente a todos los conjuntos originales.** Se denota mediante el símbolo  $\cap$  :

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Ejemplo:  $A = \{a, b, c, d, e\}$  y  $B = \{a, b, f, g, h, i, j\}$ ;  $A \cap B = \{a, b\}$

Reconocemos esta operación con la letra y. Pensemos en una escuela a la que pueden inscribirse las personas que presenten su certificado de primaria “y” paguen la inscripción (sólo cubriendo ambos requisitos será posible el ingreso). Veamos este ejemplo (los conjuntos considerados individualmente se muestran a la izquierda, y **su intersección** se identifica a la derecha mediante sombreado):



No hay intersección, o la intersección es igual al conjunto vacío.

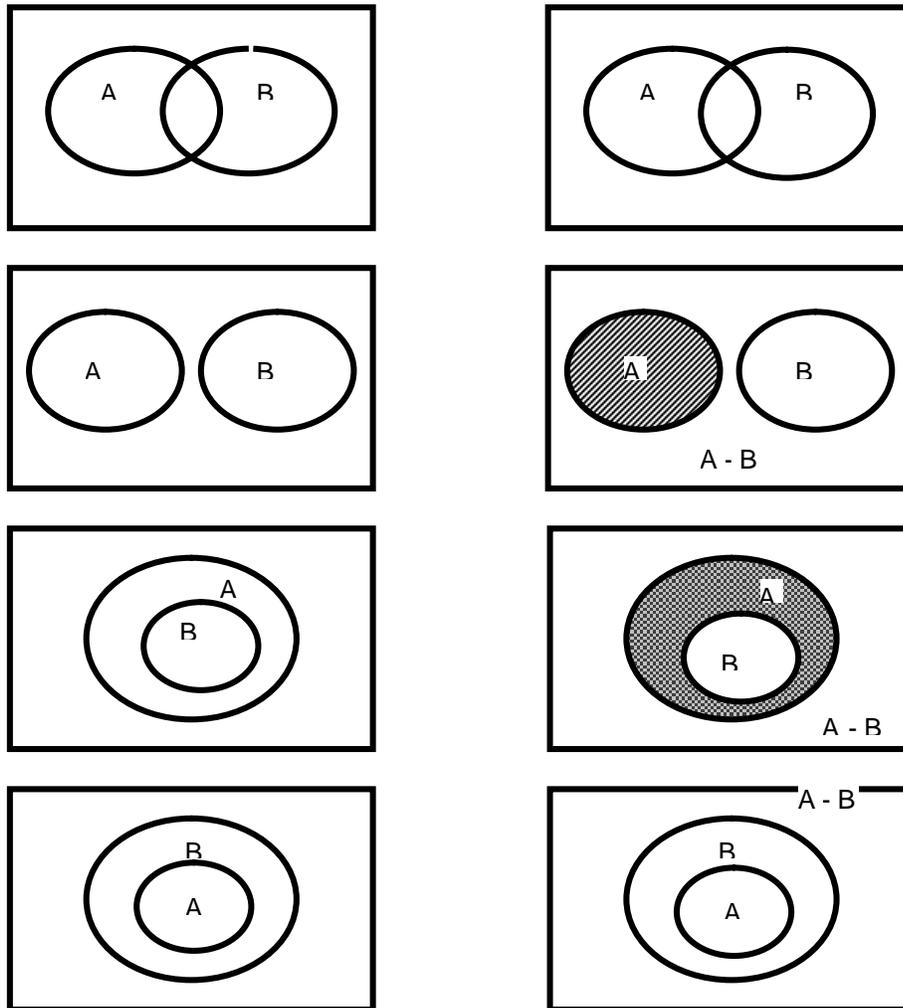


**Diferencia.** Operación entre dos conjuntos, mediante la cual se genera otro que **tiene todos los elementos que pertenecían al primero y no están incluidos en el segundo**. Esta operación **se denota** mediante el símbolo  $-$ , la podemos expresar así:

$$A - B = \{x | x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Ejemplo:  $A = \{a, b, c, d, e\}$  y  $B = \{a, b, f, g, h, i, j\}$ ;  $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$

Esta operación se identifica con la expresión “y no”. Pongamos como caso una campaña para donar sangre a la que son convocados donadores que sean menores de cuarenta años “y no” hayan padecido hepatitis. Por ejemplo (los conjuntos considerados individualmente se muestran a la izquierda, y su **diferencia** se identifica a la derecha mediante sombreado. Se presenta la diferencia A-B):



No hay un solo elemento de A que no sea también de B: la diferencia da un conjunto vacío.



**Complementación.** Requiere un solo conjunto, además del conjunto universal. Mediante ésta, se genera otro conjunto que **tiene todos los elementos que pertenecen al conjunto universal, pero no al original**. Se denota mediante el símbolo “ ’ ”:

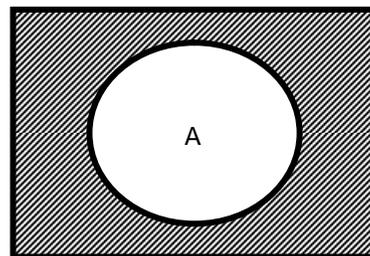
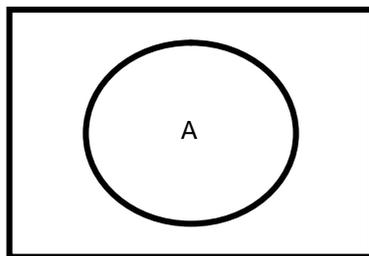
$$A' = \{x | x \in U \text{ y } x \notin A\}$$

Ejemplo:  $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$  y  $U = \{x | x \text{ es una letra del alfabeto castellano}\};$

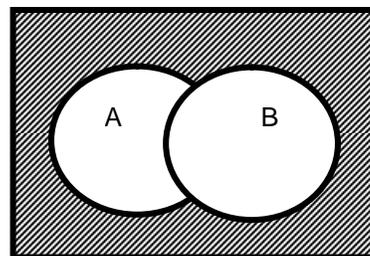
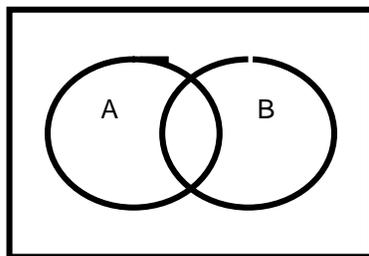
$A' = \{k, l, m, n, \tilde{o}, p, q, r, s, t, u, v, x, y, z\}$

La operación de complementación siempre implica la definición de un conjunto universal, por lo que puede considerarse como **la diferencia entre el conjunto universal y cualquier otro**. Por eso, es posible emplear las mismas expresiones verbales de la diferencia, pero el primer conjunto siempre es el universal que hayamos definido previamente.

**Ejemplos:**



$A'$



$(A \cup B)'$



**Producto cartesiano.** Operación entre dos conjuntos mediante la cual **se produce uno tercero con pares ordenados**. En este caso, el primer elemento de todos los pares pertenece al primer conjunto; y el segundo, al segundo. Si tenemos dos conjuntos cualesquiera, A y B, el producto de A por B se indica como  $A \times B$  (A “cruz” B). Se expresa así:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ y } y \in B\}$$

Si  $A = \{a, b, c\}$  y  $B = \{x, y, z\}$

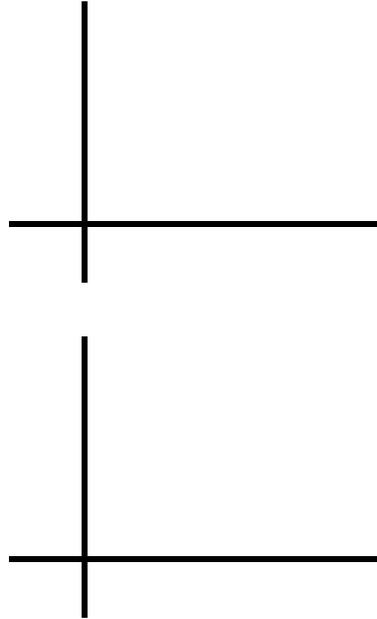
$$A \times B = \{(a, x); (a, y); (a, z); (b, x); (b, y); (b, z); (c, x); (c, y); (c, z)\}$$

Para efectuar el producto cartesiano, **debemos generar todos los pares posibles**. En nuestro ejemplo, hay tres elementos del primer y segundo conjuntos, respectivamente (no es requisito que ambos conjuntos tengan igual número de elementos). Asimismo, el producto cartesiano **no es conmutativo**; es decir,  $A \times B$  no es, en general, igual a  $B \times A$ , pues se da lugar a pares distintos. También puede realizarse el producto cartesiano de un conjunto con él mismo. Por ejemplo, utilizando el conjunto A del párrafo anterior:

$$A \times A = \{(a, a); (a, b); (a, c); (b, a); (b, b); (b, c); (c, a); (c, b); (c, c)\}$$

Es posible también **generalizar la operación del producto cartesiano** al número de conjuntos que se desee. Si utilizamos tres conjuntos, obtendremos tercias; si cuatro, cuartetos, etcétera. Siempre debemos **cuidar el orden**, de modo que el primer elemento de todos los pares, tercias, cuartetos..., pertenezca al primer conjunto, el segundo, al segundo, y así sucesivamente.

**Un modo de representar productos cartesianos es mediante diagramas como éstos:**



**Un producto cartesiano muy importante se produce si hacemos el producto del conjunto de los números reales consigo mismo  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$** , lo que nos permite generar, haciendo uso de un diagrama parecido a los anteriores, el plano cartesiano. En éste, se trazan arbitrariamente dos rectas, generalmente perpendiculares una de la otra (ejes coordenados). En el cruce de ambos ejes se halla el origen cuyas distancias horizontales se conocen como abscisas (convencionalmente, se representan con la letra  $x$ ; y son positivas a la derecha del origen y negativas a su izquierda). Las distancias verticales se conocen como ordenadas (son positivas arriba del origen y negativas debajo de éste). Desde cualquier punto del plano, puede medirse una distancia horizontal o vertical entre éste y el origen. Estas distancias conforman **las coordenadas del punto y están dadas por un par ordenado**. Por ejemplo, el par ordenado  $(2,4)$  representa un punto que está dos unidades a la derecha y cuatro arriba del origen; y  $(-3,5)$ , otro punto que está tres unidades a la izquierda y cinco arriba del origen.



## 1.2. Números reales

Están formados por **la unión de todos los números naturales**: enteros positivos, enteros negativos, racionales e irracionales.

**Números naturales.** Se utilizan para contar (están simbolizados con la **N**).

$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ . También hallamos el conjunto de los naturales más el cero:

$N_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ .

**Números enteros.** Es el conjunto de los números naturales más su negativo, incluye todos los números negativos, el cero y los positivos:

$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ .

**Números racionales.** Tienen la forma de cociente  $\frac{az}{a}$ ;  $a \neq 0$  (podemos

representarlos como  $Q = \{x | a, p \in Z, a \neq 0\}$ ). Una de sus características importantes

es que pueden ser expresados por un decimal infinito periódico como 0.8333333,

resultado de  $\frac{5}{6}$ ; 0.8888, producto a la vez de  $\frac{8}{9}$ ; 0.714285714285 (la parte que se

repite se llama periodo).

**Números irracionales.** No pueden ser representados como un decimal periódico.

Se identifican con la  $Q^c$ . Por ejemplo:

$\sqrt{3} = 1.732050808$ ;  $\sqrt{2} = 1.41413562$ ;  $\pi = 3.141592653$ ,  $e = 2.718281$

Como ya sabemos, podemos **realizar cinco operaciones importantes** con los números reales: suma, resta, multiplicación, división y exponenciación, que de igual forma son utilizadas de manera algebraica



### 1.3. Funciones matemáticas

#### Relaciones

Una relación **es cualquier subconjunto de un producto cartesiano**. Si partimos del producto cartesiano ya obtenido:

$$\text{si } A = \{a, b, c\} \text{ y } B = \{x, y, z\}$$

$$A \times B = \{(a, x); (b, y); (b, z); (c, x); (c, y); (c, z)\},$$

podemos **elegir a nuestro arbitrio** algunos (o todos los) pares que lo forman, y hacer una relación de acuerdo con nuestros intereses. Ejemplo:

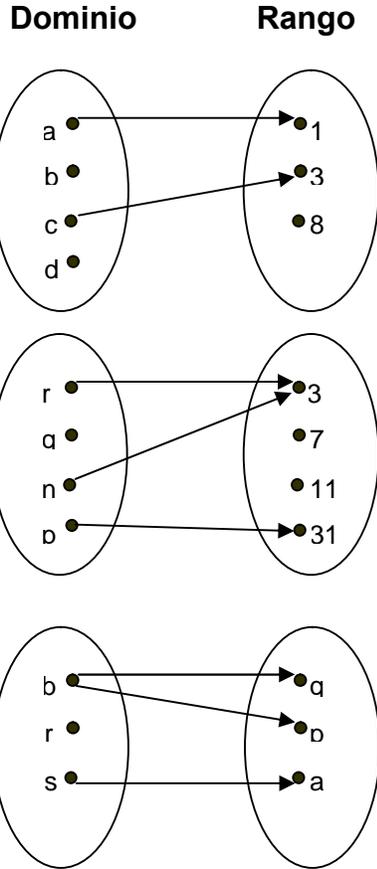
$$D = \{(a, y); (a, z); (b, x)\}$$

es subconjunto de  $A \times B$ , por tanto, forma una relación.

Cuando hacemos relaciones, el conjunto del que se toman los primeros elementos del **par se denomina dominio**; y del que se toman los segundos, **codominio, contradominio o rango** (aquí lo llamamos rango). Además, en cada par, al elemento del rango se le dice **imagen del elemento** correspondiente del dominio. Ejemplo: en los tres pares que conforman la relación D del párrafo anterior, y es imagen de a en el primer par; en tanto que z es imagen de a en el segundo, y x de b en el último.

#### Funciones

De todas las relaciones posibles de un producto cartesiano, **hay algunas en las que a cada elemento del dominio corresponde una sola imagen**. A éstas se les identifica como funciones. A continuación, mostramos algunos ejemplos de relaciones e indicamos si son o no funciones.



**Relación**

$$A = \{(a,1);(c,3)\}$$

Es función.

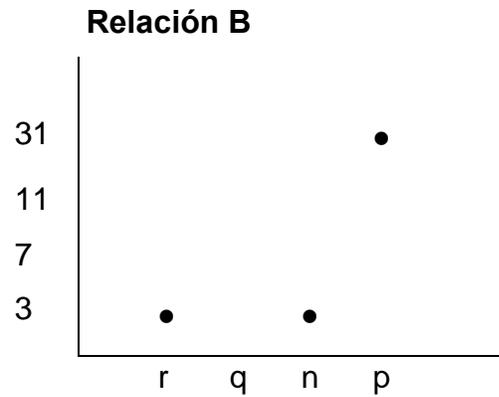
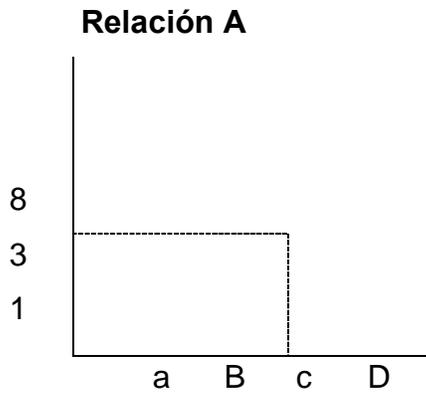
$$B = \{(r,3);(n,3);(p,31)\}$$

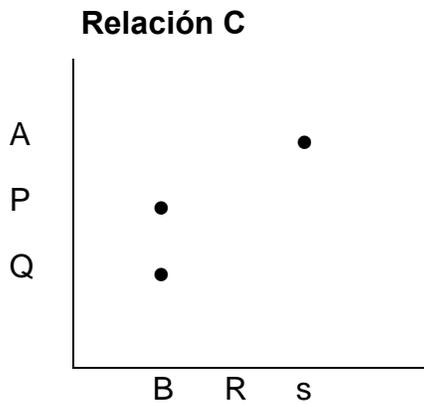
Es función.

$$C = \{(b, q);(b, p);(s, a)\}$$

El elemento  $b$  tiene dos imágenes, entonces no es función.

Otra manera de expresar las relaciones anteriores es por medio de tablas, como las que ejemplificamos a continuación:





**Una función también puede ser una variable que depende de otra(s).** Ejemplo: la calificación de un alumno (una variable) depende de las horas que haya dedicado a estudiar (otra variable). Si vemos la situación anterior con más amplitud, podemos afirmar, además, que la calificación de un estudiante (una variable) es función de las horas que estudió, la atención que puso en clase y la disponibilidad de libros en la biblioteca (otras variables).

En notación matemática decimos, por ejemplo, que  $y$  es función de  $x$ :  $y=f(x)$ ; y leemos: “ $y$  es igual a efe de equis” o “ $y$  es función de  $x$ ”. Asimismo, podemos establecer que los valores de  $z$  dependen de los de  $x$ ,  $y$  y  $t$ :  $z=f(x,y,t)$ .

Aunque las funciones que desarrollamos como subconjuntos de  $R \times R$  en el plano cartesiano pueden representarse por gráficas o tabulaciones, es más común hacerlo **mediante expresiones matemáticas, que nos dan implícitamente todos los valores posibles**. Ejemplo:  $y=2x+4$  nos indica que para encontrar el valor de  $y$ , podemos dar cualquier valor a  $x$ , multiplicarlo por dos y sumarle cuatro unidades. Al representar estas funciones en el plano cartesiano, es posible dibujar diferentes figuras geométricas (puntos, líneas rectas, círculos, etcétera).



## Funciones lineales

Entre todas las funciones que podemos idear en el plano cartesiano, las más sencillas son las lineales (si dibujamos su desarrollo, resulta una línea recta). A continuación, describimos sus **características principales**.

**Pendiente. Es la razón (o división) del incremento en altura entre el incremento en distancia horizontal.** Teniendo en cuenta que representamos las alturas en el plano cartesiano con la  $y$ , y las distancias horizontales con  $x$ , podemos decir que la pendiente de la recta que une a dos puntos cualesquiera A de coordenadas  $(X_1, Y_1)$  y B de coordenadas  $(X_2, Y_2)$  **es la diferencia entre sus ordenadas, dividida por la diferencia entre sus abscisas**; es decir,  $(Y_2 - Y_1) / (X_2 - X_1)$ . A la pendiente se le simboliza en la mayoría de los libros con la letra  $m$ , en donde  $m = (Y_2 - Y_1) / (X_2 - X_1)$ .

**Ejemplo:** si tenemos los puntos A (2,6) y B (4,12), la pendiente de una recta que los une es  $m=(12-6)/(4-2)$ , es decir,  $m=6/2$ ;  $m=3/1$ ; o simplemente 3. La interpretación de ese número es la recta que une a los puntos  $a$  y  $b$ , y sube tres unidades por una que avanza.

Frecuentemente, se duda cuál de los dos puntos (A o B) tomar primero para obtener la pendiente correcta; puede ser cualquiera. En el ejemplo resuelto, consideramos al punto A como primero y al punto B como segundo. Si invertimos el orden, tenemos:  $(6-12)/(2-4)$ ; es decir:  $-6/(-2)$ , o  $m=3$ .

Comprendido el concepto de pendiente, debemos establecer que la característica fundamental de toda recta es que su pendiente es constante.



## Ecuaciones e inecuaciones lineales

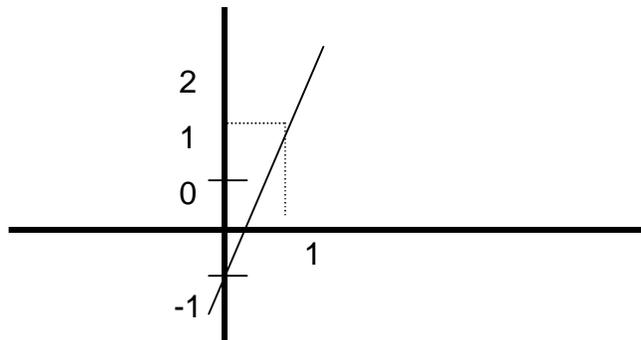
### Obtención de la ecuación de una recta

Para obtener la ecuación de una recta, necesitamos un solo punto y la pendiente o dos puntos.

**Pendiente y un punto.** Se trabaja con la fórmula de la pendiente:  $m = (y - y_1) / (x - x_1)$ .  $m$  es la pendiente que conocemos, en tanto que  $x_1, y_1$  son las coordenadas del punto; y  $x, y$  son las coordenadas de cualquier punto de la recta que debe satisfacer nuestra ecuación. Normalmente, la fórmula anterior se usa dejando las ordenadas del lado izquierdo, y las abscisas y la pendiente del derecho:  $y - y_1 = m(x - x_1)$ .

**Ejemplo:** obtén la ecuación de la recta que tiene pendiente 3 y pasa por el punto (2,5).

- Sustituyendo en la fórmula, tenemos:  $m=3, x_1=2, y_1=5$ , por ello,  $y-5=3(x-2)$ .
- Al multiplicar para eliminar el paréntesis, nos queda:  $y-5 = 3x - 6$ .
- Sumando 5 a ambos miembros:  $y = 3x-1$ .
- Si trazamos la gráfica de esta ecuación en el plano cartesiano, queda:



Podemos ver que la gráfica de la recta corta al eje de las ordenadas donde  $y$  es igual a  $-1$ , y que la pendiente de la recta se representa subiendo tres unidades por cada una que se avanza. El coeficiente de  $x$ , (3) es la pendiente; y el término independiente  $-1$ , la ordenada del punto en el que la ecuación corta al eje  $y$  (es decir, el punto 0,3).



Por eso, la manera de expresar la ecuación de las rectas con la  $y$  despejada del lado izquierdo y la  $x$  y el término independiente del lado derecho se conoce como punto, pendiente. El punto en el que la gráfica de la recta **corta al eje  $y$  es la intercepción, intercepto u ordenada al origen**. Otra forma común de presentar las ecuaciones de las rectas es igualándolas a 0, con lo que nuestra ecuación quedaría como  $3x - y - 1 = 0$ . Este modo de presentar las ecuaciones se conoce como **forma general**.

### Un caso particular

A veces, se proporcionan la pendiente y la ordenada al origen para obtener la ecuación de la recta. Es lo más fácil que se nos puede dar, pues **se sustituye directamente en la fórmula  $y = mx + b$** , en donde  $m$  sigue siendo la pendiente, y  $b$ , la ordenada al origen.

Ejemplo: si queremos encontrar la ecuación de la recta que tiene pendiente 2 y cuya ordenada al origen es  $-4$ . En este caso,  $m = 2$  y  $b = -4$ . Por ello, sustituyendo directamente en la fórmula, encontramos que  $y = 2x - 4$ .

**Dos puntos.** Para hallar la ecuación de una recta cuando se dan dos puntos, seguimos ocupando la **fórmula de la pendiente**.  $(x_1, y_1)$  es uno de los puntos y  $(x_2, y_2)$  el otro.  $(x, y)$  es, como en el caso anterior, un punto cualquiera de la recta. Con estos datos, podemos trabajar partiendo de que:

- $m = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$ , además, simultáneamente tenemos que  $m = (y - y_1) / (x - x_1)$ .
- Dado que la pendiente es igual en ambos casos, podemos **igualar las dos expresiones**, y nos queda:  $(y_2 - y_1) / (x_2 - x_1) = (y - y_1) / (x - x_1)$ . **Sustituimos directamente** los dos puntos y obtenemos, con un poco de manejo algebraico, la ecuación de la recta que buscamos. Sin embargo, **para simplificar** esta ecuación se presenta de la siguiente manera: si  $y - y_1 = m(x - x_1)$ . Entonces, como ya vimos en el caso de pendiente y un punto, sustituimos la pendiente ( $m$ ) por su fórmula, y nos queda:  $y - y_1 = [(y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)] (x - x_1)$ .



**Ejemplo:** obtén la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(2,3) y Q(12,4).

- Tenemos que  $x_1=2$ ,  $y_1=3$ ,  $x_2=12$ ,  $y_2=4$ .
- Sustituyendo, encontramos que  $y-3 = [(4-3)/(12-2)] (x-2)$ ;  $y-3 = (1/10) (x-2)$ ;  
 $y-3 = (1/10)x-(2/10)$ ;  $y=(1/10)x-(2/10)+3$ ;  $y=(1/10)x+28/10$ .

## Gráficas

Todas las funciones pueden dibujarse en el plano dando valores arbitrarios a  $x$ , que en general representa a la **variable independiente**, y encontrando el valor de  $y$ , que es, asimismo, la **variable dependiente o función**. Así, encontramos varios puntos que se unen con un trazo continuo. Para las funciones lineales bastan dos puntos; para las cuadráticas es mejor hallar cuatro o más, con el objeto de localizar de manera más precisa la gráfica de la función.

## Desigualdades (inecuaciones)

Las funciones que hemos visto hasta el momento tienen el signo de igual entre la variable dependiente y la independiente. Sin embargo, hay otro tipo de expresiones:

- La **no igualdad** (representada como  $\neq$ ). Significa que la función es verdadera para todos los puntos, menos para los de la igualdad.

Si la función  $y=x+4$  puede ser representada en el plano cartesiano por una recta con pendiente 1 y ordenada al origen 4, la función  $y \neq x+4$  **se representa por dos áreas completas** (una arriba y otra debajo de la recta, en las que la función se cumple) **y una línea** (precisamente  $y = x+4$ ) en la que la función no se cumple.

- **Desigualdades de mayor o menor que.** Se representan con los símbolos  $>$  (mayor que) y  $<$  (menor que). **En el primer caso**, la función se cumple en todos los puntos por encima de la función que los delimita; **en el segundo**, en el área por debajo de la función. En ambas modalidades, no se incluye la línea



- **Desigualdades de mayor o igual o menor o igual que.** Se representan como  $\geq$  (mayor o igual que) y  $\leq$  (menor o igual que). **En el primer caso**, la función se cumple en todos los puntos por encima de la función que los delimita; en el segundo, en el área por debajo de la función. (En ambas modalidades se incluye la línea).

### Sistema de ecuaciones lineales

Es común encontrar **el punto donde se intersecan dos rectas**, lo que se resuelve mediante sistemas de ecuaciones simultáneas. Hay varios métodos para realizarlo, expliquémoslos mediante la resolución del sistema:

$$2x - y - 4 = 0$$

$$x - y + 2 = 0$$

#### □ Método gráfico

En una hoja de papel milimétrico, hay que dibujar las gráficas de ambas ecuaciones e identificar el punto donde se cruzan.

#### □ Suma y resta

Se trata de **eliminar una de las variables** sumando o restando, miembro a miembro, una ecuación o un múltiplo de ésta para encontrar los valores:

$$2x - y - 4 = 0 \text{ (a)}$$

$$x - y + 2 = 0 \text{ (b)}$$

Multiplicamos la ecuación  $b$  por  $(-1)$  y la sumamos a la ecuación  $a$ :

$$-x + y - 2 = 0 \text{ (-b)}$$

$$2x - y - 4 = 0 \text{ (a)}$$

$$x - 6 = 0$$

$$x = -6$$



Si lo hacemos en  $b$ , sustituimos en cualquiera de las ecuaciones originales y tenemos:

$$6 - y + 2 = 0$$

$$6 + 2 = y$$

$$y = 8$$

#### □ Igualación

Se despeja la misma variable en ambas ecuaciones y se igualan los despejes:

$$A \quad 2x - y - 4 = 0 \quad y = 2x - 4$$

$$B \quad x - y + 2 = 0 \quad y = x + 2$$

$$2x - 4 = x + 2$$

$$2x - x = 2 + 4$$

$$x = 6$$

Sustituimos en A:

$$2(6) - y - 4 = 0$$

$$12 - y - 4 = 0$$

$$12 - 4 = y$$

$$y = 8$$

#### □ Sustitución

Se despeja una de las variables en una ecuación y se sustituye el despeje en la otra. Luego, se resuelve el sistema:

$$a) \quad 2x - y - 4 = 0 \quad y = 2x - 4$$

$$b) \quad x - y + 2 = 0$$

Sustituimos el valor de  $y$  ( $2x - 4$ ) en  $b$ :

$$x - (2x - 4) + 2 = 0$$

$$x - 2x + 4 + 2 = 0$$

$$-x + 6 = 0$$

$$-x = -6$$

$$x = 6$$



Sustituimos en cualquiera de las ecuaciones originales, por ejemplo, en  $b$ :

$$6 - y + 2 = 0$$

$$6 + 2 = y$$

$$y = 8$$

### Ecuaciones cuadráticas

A veces, las variables no están expresadas a la primera potencia, sino que el exponente es más alto. En esta sección, veremos solamente las funciones en las que **el exponente máximo es el cuadrado** (por ejemplo,  $y = x^2 - 4x + 8$ ). Por ello, a estas ecuaciones –que tienen aplicaciones en los campos de la contaduría, la administración y la informática– se les llama cuadráticas.

A las funciones cuadráticas de **dos variables** (convencionalmente  $x$ ,  $y$ ) se las puede representar en el plano cartesiano mediante **gráficas de diversas curvas**: círculos, elipses, parábolas e hipérbolas. También son conocidas como cónicas, ya que es posible generarlas cortando un cono con un plano (al hacerlo en diferentes ángulos, se encuentran las curvas antes señaladas). En esta sección solamente veremos la manera como se hallan las raíces de una ecuación cuadrática. Debemos recordar que las ecuaciones cuadráticas pueden tener dos, una o ninguna solución real, dependiendo del caso.

Se llaman raíces de una ecuación cualquiera **los puntos en los que la gráfica de esa ecuación corta al eje  $x$** . Para comprender el proceso de resolución, debemos considerar que en cualquier punto del eje  $x$ ,  $y$  es igual a 0. Por eso, **para encontrar las raíces de la ecuación, debemos igualar la  $y$  a 0 y resolver lo que resulte**. Si tenemos una ecuación de primer grado, por ejemplo,  $y = 2x - 4$ ; al hacer  $y = 0$ , nos queda  $2x - 4 = 0$ , por ello,  $2x = 4$ , por lo que  $x = 4/2 = 2$ .



Lo anterior significa que la gráfica de la ecuación antes citada corta al eje  $x$  en el punto en el que  $x$  es igual a 2. En las ecuaciones de segundo grado la lógica es la misma, pero el **proceso, diferente**.

Podemos presentar la ecuación de segundo grado como  $Y = ax^2+bx+c$ . Aquí,  $a$  es el coeficiente de la variable al cuadrado;  $b$ , el de la variable a la primera potencia; y  $c$ , el término independiente. En la ecuación cuadrática que ya vimos,  $y = x^2-4x+8$ ;  $a = 1$ ,  $b = -4$ ,  $c = 8$ . Además, en este tipo de ecuaciones, tanto  $b$  como  $c$  pueden valer 0 (es decir, puede no haber término a la primera potencia y/o término independiente), pero **siempre debe existir el coeficiente del término cuadrático**.

De acuerdo con la lógica anterior, localizar las raíces de una ecuación de segundo grado implica hallar los puntos donde la gráfica de esa ecuación corta al eje  $x$ . Por ello, y debe ser igual a 0, entonces,  $ax^2+bx+c=0$ . Hay **diferentes métodos** para resolver ecuaciones cuadráticas, **dependiendo de si  $b$  o  $c$  son 0**. Veamos algunos casos.

- **$ax^2+c=0$** . Por eso,  $ax^2=-c$ ; consecuentemente,  $x^2=-c/a$  y  $x$  es la raíz cuadrada del último valor. Si  $-c/a$  es un número negativo, la ecuación no tendrá solución real; en caso contrario, una de las soluciones será la raíz positiva y la otra la negativa (al signo de raíz cuadrada se antepone normalmente un  $+/-$  para indicar que una de las raíces es positiva y la otra negativa).

Ejemplo:  $Y=2x^2-8$ ; por ello,  $2x^2-8=0$ . En esta ecuación,  $a=2$  y  $c=-8$ . Sustituyendo, tenemos:  $x=+/-\sqrt{(8/2)}$ ; es decir,  $x=+/-\sqrt{4}$ . Debido a lo anterior, los dos valores de  $x$  son  $x_1=2$ , en tanto,  $x_2=-2$ .

Ejemplo:  $Y=4x^2+8$ , por eso,  $4x^2+8=0$ . En esta ecuación,  $a=4$  y  $c=8$ ; y debido a que  $-c/a$  es un número negativo ( $-2$ ), no tiene solución real.



Ejemplo:  $Y = 2x^2 - 8$ ; por ello,  $2x^2 - 8 = 0$ . En esta ecuación,  $a = 2$  y  $c = -8$ . Sustituyendo, tenemos:  $x = \pm \sqrt{(8/2)}$ ; es decir,  $x = \pm \sqrt{4}$ . En consecuencia, los dos valores de  $x$  son  $x_1 = 2$ , en tanto,  $x_2 = -2$ .

- **$c = 0$ .** Tenemos  $ax^2 + bx = 0$ . Factorizando  $x$ ,  $x(ax + b) = 0$ . Así, la ecuación ofrece dos soluciones:  $x = 0$  y  $x = -b/a$ .

Ejemplo:  $2x^2 + 5x = 0$ . De acuerdo con lo visto en el párrafo anterior, las soluciones pueden ser:  $x_1 = 0$  y  $x_2 = -b/a$ ; en nuestro caso,  $x_2 = -5/2$ .

- **La ecuación completa  $y = ax^2 + bx + c$ .** Para hallar las raíces, tenemos que  $ax^2 + bx + c = 0$ . La solución a este tipo de ecuaciones puede darse factorizando en dos binomios o usando la fórmula general de la ecuación de segundo grado:  $x_1 = [-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}] / 2a$ ;  $x_2 = [-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}] / 2a$ . Desde luego, la fórmula general puede aplicarse para resolver cualquier ecuación de este grado aunque no esté completa.

Ejemplo: encuentra las raíces (o soluciones) de  $x^2 + 2x - 8 = 0$

Factorizando, tenemos:  $(x+4)(x-2) = 0$ . Podemos resolver dividiendo alternativamente ambos lados de la ecuación, primero por  $x-2$  y posteriormente por  $x+4$ :  $x-2 = 0/(x+4) = 0$ ; por ello, la primera  $x$  o  $x_1 = 2$ . Alternativamente,  $2x+4 = 0/(x-2) = 0$ , por lo que  $x+4 = 0$  y  $x = -4$ .

Aplicando la fórmula general,  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = -8$ . Entonces, al sustituir en la fórmula:  $x_1 = [-2 + \sqrt{(4 - 4 \cdot 1 \cdot (-8))}] / 2 \cdot 1$ ;  $x_2 = [-2 - \sqrt{(4 - 4 \cdot 1 \cdot (-8))}] / 2 \cdot 1$ . El resultado es  $x_1 = 2$ , en tanto que  $x_2 = -4$ .

Puede suceder que la cantidad subradical (la que está dentro del radical:  $b^2 - 4ac$ ) sea negativa. En ese caso, la ecuación no tiene solución real.



## Aplicaciones

### Funciones lineales de costo

Al producir un bien se incurre en costos, que podemos desglosar **en dos tipos: fijos (CF)**, los que hace la empresa independientemente del número de unidades del bien que fabrique (por ejemplo, renta del local, energía eléctrica de las oficinas, sueldo de los vigilantes); y **variables unitarios (CVU)**, cambian con el número de unidades elaboradas (por ejemplo, mano de obra y materiales directos). Además están los **costos totales (CT)**, relacionados linealmente con las unidades de un bien ( $q$ ). Así, tenemos:  $CT=CVUq+CF$ .

Si estudiamos a la empresa Me Escribe, S.A., fabricante de cuadernos; y definimos costos fijos de \$50,000.00 por mes y el costo variable unitario de \$5.50/cuaderno para un nivel de producción entre 0 y 100 mil cuadernos por mes, nuestra función lineal de costo es:  $CT=5.50q+50,000$ . Ésta nos permite calcular el valor total al producir diferentes cantidades de cuadernos mensualmente. Ahora, si queremos generar 40 mil cuadernos, el costo total será:  $CT=5.50(40,000)+50,000$ ; esto es: \$270,000. En cambio, si deseamos fabricar 60 mil, el costo será:  $CT=5.50(60,000)+50,000$ ; es decir, \$380,000.

### Funciones lineales de ingreso

Si tenemos un precio de venta fijo (PV), los ingresos de una empresa que comercializa un solo producto (I) serán del precio de venta por el número de bienes producidos y vendidos ( $q$ ). Dado lo anterior, **el ingreso de la empresa** lo expresamos como  $I=PVq$ .

Si el precio al que la empresa Me Escribe, S.A. vende sus cuadernos es \$10.00, su función de ingresos es<sup>1</sup>:  $I=10q$ . Ésta nos permite calcular el ingreso total al

<sup>1</sup> En este caso, hacemos una suposición simplificadora cuando hablamos de que el precio es fijo, sin considerar que puede haber descuentos por volumen y otras alteraciones, y especulando



vender distintas cantidades de cuadernos mensualmente. Si queremos vender 40 mil cuadernos, el ingreso total será  $I=10(40,000)$ ; esto es, \$400,000. En cambio, si logramos vender 60 mil, el ingreso será de  $I=10(60,000)$ ; es decir, \$600,000.

### Punto de equilibrio financiero

Un punto que les interesa especialmente a los administradores es aquel en que la empresa no pierde ni gana, es decir, cuando los ingresos se equilibran con los costos: *punto de equilibrio financiero*. Conociendo las funciones de costo total y de ingreso, este punto se calcula fácilmente **igualando la función** de ingresos con la de costos totales. A continuación ejemplificamos este procedimiento, considerando la fábrica de cuadernos ya citada.

$$I=10q$$

$$CT=5.50q+50,000$$

$$10q=5.50q+50,000$$

$$4.50q=50,000$$

$$q=50,000/4.50$$

$$q=11,111 \text{ cuadernos, aproximadamente, redondeando a la unidad más próxima}$$

Esto es muy fácil de comprobar, sustituyendo el valor encontrado, tanto en la función del ingreso como en la del costo:

$$I=10(11,111)=111,110$$

$$CT=5.50(11,111)+50,000=111,110.50$$

Hemos notado que el ingreso y el costo son prácticamente iguales. La pequeña diferencia es el redondeo.

---

también que es posible vender la cantidad que se desee a ese precio. Esta última suposición es razonable en tanto los volúmenes manejados por nuestra empresa sean pequeños en relación con el mercado total de cuadernos; de lo contrario, tendrá que bajar su precio si desea vender más unidades.



### **Función lineal de utilidad**

Aun cuando el punto de equilibrio financiero es interesante, la mayoría de las empresas se esfuerzan por tener utilidades. Con la información que poseemos es muy fácil obtener **la función de utilidades (U)**, pues éstas sólo son **la diferencia entre el ingreso y el costo total**. Seguimos este procedimiento:  $U=I-CT$ . Sustituyendo por sus equivalentes, tenemos:  $U=PVq-(CVUq+CF)=(PV-CVU)q-CF$ .

Entonces, en la fábrica citada:

$$U=(10q-5.50q+50,000)=(10-5.50)q-50,000$$

$$U=4.50q-50,000$$

Si deseamos saber cuál es la utilidad de producir y vender 30 mil cuadernos, debemos sustituir  $U=4.50(30,000)-50,000=85,000$ .

### **Función lineal de la demanda**

La demanda por periodo de un bien normal **es función de muchas variables**: precio del bien, ingresos de las personas, gusto de los consumidores, existencia y precio de los productos que pueden sustituir al bien, etcétera. Si consideramos que sólo varía el precio del bien y lo demás permanece constante, encontraremos **la función de demanda del artículo en relación con el precio**. Esta demanda, en general, tiene pendiente negativa, es decir, a mayor precio del bien menor la cantidad que se requiere del mismo. Si denominamos  $q$  a la cantidad de unidades de ese bien solicitadas por una comunidad en una unidad de tiempo, por ejemplo, un mes; y  $p$  al precio unitario de ese bien, tenemos:  $q=f(p)$ .



La gráfica de la función de demanda puede tener diversas formas, como una línea recta. Así, luego de hacer un estudio, podemos afirmar que la demanda de cuadernos durante un año en una ciudad es:  $q = -200p + 20,000$ .

Lo anterior quiere decir que si la fábrica regalara los cuadernos, la comunidad demandaría 20 mil cuadernos al año (si el precio es 0,  $q = -200(0) + 20,000$ ). En cambio, si los vendiera a \$50, sólo se requerirían 10 mil durante el mismo lapso, pues  $q = -200(50) + 20,000$ .

### **Función lineal de oferta**

Si variamos el precio del bien y suponemos que los demás factores permanecen fijos, hallamos una **función de oferta del tipo  $q = f(p)$** . Igual que en el caso anterior,  $q$  representa la cantidad de bienes demandados por unidad de tiempo; y  $p$ , el precio unitario del artículo. Es decir, la cantidad de un producto que se desea introducir al mercado es función del precio que pueden cobrar por él. En este caso, **la pendiente es positiva**, dado que mientras mayor precio tiene un bien, más les interesa a los productores llevarlo al mercado.

Supongamos que en la comunidad del caso anterior los fabricantes están dispuestos a producir cuadernos según la siguiente función de oferta:  $q = 100p - 1,000$ . Entonces, si el artículo vale \$20.00, los productores estarán interesados en elaborar  $q = 100(20) - 1,000 = 1000$ .

### **Punto de equilibrio de mercado**

Hay un punto en el que **se iguala la cantidad de productos** que los consumidores están dispuestos a comprar y la que los fabricantes están interesados en vender. Este punto es muy fácil de encontrar **igualando ambas funciones** (oferta y demanda). Veamos:

$$q = -200p + 20,000 \text{ (demanda)}$$

$$q = 100p - 1,000 \text{ (oferta)}$$



Si la cantidad ofrecida y la demandada son iguales, tenemos:

$$100p - 1,000 = -200p + 20,000$$

Y concentrando los términos que tienen  $q$  en el primer miembro:

$$100p + 200p = 20,000 + 1,000$$

Si realizamos las operaciones indicadas, nos queda:

$$300p = 21,000; \text{ o: } p = 21,000 / 300 = 70$$

Entonces, el precio al que los consumidores están dispuestos a comprar la misma cantidad de cuadernos que los fabricantes están dispuestos a producir es \$70.00.

Y **la cantidad intercambiada** se obtiene sustituyendo en cualquiera de las funciones, por ejemplo, en la de la oferta:

$$q = 100(70) - 1,000 = 6,000.$$

Así, el punto de equilibrio de mercado se alcanzará con un precio de \$70 por cuaderno, y serán intercambiados 6 mil cuadernos anualmente.





## Unidad 2. Matrices

- 2.1. Conceptos básicos
- 2.2. Operaciones con matrices
- 2.3. Matriz inversa
- 2.4. El método de Gauss-Jordan
- 2.5. Aplicaciones





## Objetivos particulares de la unidad

Al culminar el aprendizaje de la unidad, lograrás analizar la naturaleza de una matriz, sus conceptos principales y operaciones. Asimismo, podrás efectuar operaciones entre matrices e identificar situaciones relacionadas con la Administración y Contaduría en las que pueden aplicarse.





## 2.1. Conceptos básicos

Una matriz es un **conjunto de elementos (ordenados en renglones, o en filas y en columnas), que pueden ser funciones, variables o números** (nosotros trabajaremos fundamentalmente con variables y números reales). Asimismo, es un medio común para **resumir y presentar números o datos; y está formada por  $m$  renglones y  $n$  columnas**, siendo  $m$  y  $n$  dos números naturales (1,2,3,4,5...). La matriz más pequeña que podemos manejar tiene un renglón y una columna; pero puede tener tantos renglones y columnas como sea necesario. De forma parecida a lo que se hace en conjuntos, las matrices se denotan con letras mayúsculas y sus elementos con minúsculas.

Los elementos de una matriz son identificados por medio de subíndices. Por ejemplo,  $a_{33}$  es el elemento que ocupa el tercer renglón y la tercera columna de la matriz A;  $b_{21}$ , el segundo renglón y la primera columna de la matriz B...; y, en general,  $b_{ij}$ , el  $i$ -ésimo renglón y la  $j$ -ésima columna de la matriz B. Para la matriz B, que se ejemplifica abajo, el elemento  $b_{21}$  corresponde a 1 y  $b_{33}$  a 9.

Las matrices **pueden representarse con paréntesis rectangulares, circulares o con doble raya**, como se ejemplifica a continuación:

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} 3 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & -7 \end{array} \right\| \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \left\{ \begin{array}{ccc} -4 & 8 & 5 \\ 12 & 3 & 5 \\ 0 & 9 & 3 \end{array} \right\}$$

### Orden de las matrices

El orden de una matriz **es el número de renglones y columnas que la componen, expresado como un par ordenado (m,n)**. Por ejemplo, una matriz de orden (4,3) tendrá cuatro renglones y tres columnas. Cuando la matriz posee igual número de renglones y de columnas ( $m=n$ ), decimos que es una **matriz**



**cuadrada**; en caso contrario, **rectangular**. El orden de las matrices ejemplificadas en el párrafo anterior es para A, (2,4); B, (3,3); y C, (3,3). Además, A es una matriz rectangular, en tanto que B y C son cuadradas.

### Igualdad de dos matrices

Dos matrices son iguales **si y sólo si son del mismo orden y sus elementos correspondientes son iguales**. Es decir, las matrices A y B son iguales únicamente si tienen el mismo número de renglones y columnas, y si  $a_{11}$  es igual a  $b_{11}$ ;  $a_{12}$  a  $b_{12}$ , etcétera. Veamos el ejemplo siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \end{pmatrix}$$

La matriz A puede ser igual a la B porque ambas son del mismo orden (2,5), pero sólo lo será si  $a$  es igual a 1;  $b$ , a 2;  $c$ , a 3;  $d$ , a 4;  $e$ , a 5;  $f$ , a 6;  $g$ , a 7;  $h$ , a 8;  $i$ , a 9; y  $j$ , a 0.

### Algunas matrices especiales

A una matriz que tiene un solo renglón (orden  $[1,n]$ ) se le llama **matriz renglón o vector renglón**; y a la que tiene una sola columna (orden  $[m,1]$ ), **matriz columna o vector columna**. A continuación, damos un ejemplo de cada una de ellas:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ es una matriz columna; } (7 \ 3 \ -1 \ 2 \ 6), \text{ una matriz renglón}$$



### Diagonal principal

La diagonal que **va de la esquina superior izquierda de la matriz hacia la esquina inferior derecha** se denomina diagonal principal. Se reconoce porque, en los elementos que contiene, los subíndices  $i,j$  son iguales. Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 9 \\ 9 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 9 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

En la matriz A están señalados los componentes de la diagonal principal:  $a_{11} = 2$   
 $a_{22} = 0$   $a_{33} = 4$   $a_{44} = 7$ .

### Matriz diagonal

Es cuadrada y todos sus elementos son igual a cero, excepto los de la diagonal principal.

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

### Matriz escalar

En este caso, los elementos de la diagonal principal son iguales, y los demás son ceros. Ejemplo:

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$



### Matriz identidad o unidad

Matriz escalar cuyos elementos de la diagonal principal son unos. Ejemplo:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sin importar su orden, a la matriz identidad se le designa ordinariamente con la letra  $I$ .

### Matriz cero o nula

Matriz que sólo tiene ceros en todos sus elementos. Ejemplo:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 2.2. Operaciones con matrices

### Transposición o transpuesta de una matriz

Si en una matriz cambiamos renglones por columnas, la estamos transponiendo. La operación se hace de manera que el primer renglón se transforme en la primera columna; el segundo renglón en la segunda columna, y así sucesivamente. La transposición se denota con una T, puesta como exponente en la matriz ya transpuesta. Ejemplos:

Si tenemos una matriz renglón  $A = (9 \ 6 \ 8)$ , ésta se convierte en **matriz**

**columna:**  $A^T = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$



Pero si tenemos una matriz columna  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ , a se transforma en matriz

renglón:  $B^T = (1 \ 7 \ 9)$

En general, al transponer una matriz de  $m$  renglones y  $n$  columnas, ésta se convierte en una matriz de  $n$  renglones y  $m$  columnas. El primer renglón de la matriz  $A$  es la primera columna de su transpuesta; y el segundo, la segunda columna.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

En una matriz cuadrada, el orden se conserva; sólo son cambiadas las columnas por los renglones (la diagonal principal permanece intacta):

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad B^T = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \\ 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

En general, un elemento  $a_{ij}$  se convierte en un elemento  $a_{ji}$  en la matriz transpuesta.

## Suma y resta

Estas operaciones son posibles exclusivamente si son del mismo orden (tienen el mismo número de renglones y de columnas). Esta condición es llamada **criterio de conformidad**.



Ejemplos:

Si se desea sumar una matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 & 1+3 \\ -7+3 & 0+7 \\ 3-2 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -4 & 7 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}$$

Pero si tenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \\ -9 & 0 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

No hay respuesta en la operación anterior, pues ambas son matrices de orden diferente.

Como podemos observar, la adición se realiza sumando elemento a elemento de las matrices, de tal manera que  $A + B = a_{ij} + b_{ij}$ .

Tal como sucede con la suma, **la resta de dos matrices** es posible solamente cuando ambas son del mismo orden, y el resultado es la resta de los elementos correspondientes. Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-5 & -3-0 & 4-2 \\ 1-3 & 4-(-5) & -5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ -2 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$

Es decir, tenemos que  $A-B = a_{ij} + b_{ij}$ .

### Multiplicación por un escalar

Podemos multiplicar una matriz por un número real cualquiera  $\lambda$ , y el resultado será el de multiplicar cada elemento de la matriz por ese número real. Es decir, el producto de la matriz  $A = [a_{ij}]$  por el escalar  $\lambda$  es una nueva matriz  $B = [b_{ij}]$  del mismo orden que  $a$ , donde  $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ .



Ejemplo:

Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ su producto por } \lambda \text{ es: } \lambda \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & -\lambda \\ 3\lambda & 4\lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } \lambda = 3 \qquad 3A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

### Producto de dos matrices

Al multiplicar una matriz por otra, obtenemos una tercera. Esta operación se denota por un punto en medio de las matrices que deseamos multiplicar:  $A \cdot B$  (se lee A por B).

Para multiplicar dos matrices, el número de columnas de la primera **debe ser igual al número de renglones de la segunda**. El resultado de la operación tendrá el número de renglones de la primera matriz y el de columnas de la segunda. Simbólicamente, si la matriz A es de orden (m,n) y la B, de (p,r), el producto es posible si  $n = p$  y la matriz que resulta del producto es una matriz de orden (m,r).

Por ejemplo, está la matriz A de orden (4,3) y queremos multiplicarla por una B de orden (3,7). El producto es posible y el resultado será una matriz de orden (4,7). De estos conceptos se desprende que **en matrices el orden de los factores sí altera el producto**. De hecho, en el ejemplo anterior, el producto de A por B sí es posible, pero el de B por A no, dado que B es de orden (3,7) y A de orden (4,3). El número de columnas de la primera matriz no es igual al de renglones de la segunda.



El caso más sencillo de multiplicación de dos matrices se da con el producto de una matriz renglón con una matriz columna.

Ejemplo:

$$\begin{array}{ccc}
 & & \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \\
 & \nearrow & \nearrow \\
 & \nearrow & \nearrow \\
 \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & & \\
 & & = (2(4)+3(2)+1(5)) = (8+6+5) = (19)
 \end{array}$$

El producto de ambas se indica con las flechas. Como vemos, la matriz que premultiplica es de orden (1,3); y la que posmultiplica, de (3,1). **El producto es conformable**, dado que el número de columnas de la primera matriz es igual al de renglones de la segunda. El producto es, de acuerdo con lo indicado, del número de renglones de la primera matriz y del número de columnas de la segunda; es decir, un renglón y una columna (1,1).

En este caso, tenemos que la matriz que premultiplica (de orden [1,3]) y la que posmultiplica (de orden [3,1]) pueden intercambiarse para intentar hacer el producto de dos matrices (3,1) por (1,3). Así, el producto es *conformable* (una columna en la primera matriz y un renglón en la segunda) y debe ser de orden (3,3).

Cuando las matrices son **de orden diferente**, su producto es una generalización del producto que vimos (el de matriz renglón por matriz columna).

A continuación realizamos un producto y explicamos, paso a paso, la generación de cada uno de sus elementos. Usamos las matrices  $A_{(2,2)}$  y  $B_{(2,2)}$ . El producto será la matriz  $C_{(2,2)}$ , de tal manera que  $A \cdot B = C$ .



$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2(2)+4(1)+3(0) & -2(4)+4(6)+3(9) \\ 1(2)+0(1)+7(0) & 1(4)+0(6)+7(9) \\ 3(2)+5(1)+8(0) & 3(4)+5(6)+8(9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+4+0 & -8+24+27 \\ 2+0+0 & 4+0+63 \\ 6+5+0 & 12+30+72 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 43 \\ 2 & 67 \\ 11 & 114 \end{pmatrix}$$

### Potencia de una matriz

Una matriz cuadrada **puede multiplicarse por sí misma** las veces que se desee. Si multiplicamos la matriz B por sí misma, tendremos  $B^2$ ; si repetimos la operación, nos da  $B^3$ , etcétera.

A continuación ejemplificamos el cuadrado de una matriz de orden (2,2):

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(1)+2(3) & 1(2)+2(4) \\ 3(1)+4(3) & 3(2)+4(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+8 \\ 3+12 & 6+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

### Determinante de una matriz

Cuando se tiene una matriz cuadrada, sus elementos **pueden ser combinados para calcular un número real**. Este valor es de utilidad en la solución de ecuaciones simultáneas. Se escribe mediante dos líneas verticales alrededor del nombre de la matriz o colocando líneas verticales en torno de los elementos de la

Determinante de una matriz de 2X2:



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad |A| = (1)(5) - (3)(-2) = 5 + 6 = 11$$

### Pasos para encontrar el valor de la determinante de un matriz de 3X3:

- Reescribimos las dos primeras columnas de la matriz a la derecha de la matriz original.
- Localizamos los electos en las tres diagonales primarias y las tres diagonales secundarias.
- Multiplicamos los electos en cada diagonal primaria y cada diagonal secundaria.

Por último, la determinante es igual a la suma de los productos de las tres diagonales primarias menos la suma de los productos de las tres diagonales secundarias:

#### Secundarias

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

#### Primarias

$$|A| = [(3)(2)(1) + (1)(4)(3) + (2)(-1)(-2)] - [(3)(2)(2) + (-2)(4)(3) + (1)(-1)(1)]$$

$$|A| = (6 + 12 + 4) - (12 - 24 - 1) = 22 - (-13) = 35$$

$$|A| = 35$$



### 2.3. Matriz inversa

En algunas matrices puede identificarse otra, denominada inversa o matriz inversa multiplicativa. Si se tiene una matriz A cuadrada, se dice que B es inversa de A si **satisface las siguientes ecuaciones matriciales:**

$$AB=I \text{ y } BA=I$$

Donde:

I = matriz identidad

Podemos comparar la inversa con el recíproco de un número real en álgebra. Los aspectos importantes sobre la inversa son:

- Para que una matriz tenga inversa tiene que ser cuadrada.
- La inversa de A también será cuadrada y de la misma dimensión que A.
- No toda matriz cuadrada posee una inversa.

Una matriz tendrá inversa si todos sus renglones o columnas son linealmente independientes; es decir, que ninguno sea una combinación lineal.

Si tenemos la matriz  $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ , es inversa de  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Para probar que B es una inversa de A, se multiplica  $AB=I$  y  $BA=I$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(-2) + 2(3/2) & 1(1) + 2(-1/2) \\ 3(-2) + 4(3/2) & 3(1) + 4(-1/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(1) + 1(3) & -2(2) + 1(4) \\ 3/2(1) - 1/2(3) & 3/2(2) - 1/2(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Por tanto, B es la inversa de A. También se puede denominar la inversa de A como  $A^{-1}$ .

## 2.4. El método de Gauss-Jordan

Uno de los métodos más utilizados para encontrar la inversa de una matriz es el método de Gauss-Jordan. El procedimiento es:

- A la matriz A sumamos una matriz identidad (mxn), lo cual da por resultado  $(A|I)$ .
- Efectuamos las operaciones del renglón en toda la matriz aumentada, de manera que A se transforme en una matriz identidad (m x n). El resultado será  $(I|A^{-1})$ , donde  $A^{-1}$  se puede leer a la derecha de la línea vertical.

### Ejemplo 1

Encontremos la inversa de  $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & | & 1 & 0 \\ 2 & 7 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5/3 & | & 1/3 & 0 \\ 2 & 7 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5/3 & | & 1/3 & 0 \\ 0 & 11/3 & | & -2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5/3 & | & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & | & -2/11 & 3/11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 7/11 & -5/11 \\ 0 & 1 & | & -2/11 & 3/11 \end{pmatrix}$$

Tenemos la matriz aumentada.

Multiplicación del renglón 1 por 1/3.

Multiplicación del renglón 1 por -2, y adición del producto al renglón 2.

Multiplicación del renglón 2 por 3/11.

Multiplicación del renglón 2 por -5/3 y suma del producto al renglón 1.

### Ejemplo 2

Sea la matriz:



$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se forma la matriz aumentada:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad R_1 - R_2 \quad \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} -R_1 \\ R_2 + 3R_1 \\ R_3 + 2R_1 \end{array} \quad \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} R_1 + R_2 \\ -R_2 \\ R_3 - R_2 \end{array} \quad \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} R_1 - R_3 \\ R_2 + R_3 \end{array} \quad \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

La inversa de B es la matriz:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



## 2.5. Aplicaciones

El uso de inversas para resolver sistemas de ecuaciones es uno de los empleos del método Gauss-Jordan. En este caso, se le conoce también como **método de reducción de renglones**, que a continuación explicamos:

- a) Debemos tener la matriz aumentada: del lado izquierdo los coeficientes de las ecuaciones; y del derecho, las constantes de las mismas.
- b) Para facilitar la solución podemos intercambiar los renglones para obtener el pivote igual a uno y evitar tener fracciones al principio.
- c) Se multiplican o dividen los renglones por una constante distinta de cero.
- d) Se suma o resta de un múltiplo constante de un renglón  $a$ , o de otro renglón.

### Ejemplo

Usando el método de reducción de renglones, resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2x - 3y + 4z = 13$$

$$x + y + 2z = 4$$

$$3x + 5y - z = -4$$

La matriz aumentada es:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 13 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & -1 & -4 \end{array} \right)$$

El propósito es aplicar operaciones entre renglones hasta que las tres primeras columnas o la matriz del lado izquierdo formen una matriz identidad. **El mejor procedimiento** es tratar las columnas una por una, cambiando los elementos de la diagonal principal a 1 (uno) y haciendo que los demás electos sean ceros. En



este caso, conviene invertir el renglón 1 por el 2, ya que el primer número es 1; de esta manera evitamos trabajar con fracciones al principio del proceso. Así:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 13 \\ 3 & 5 & -1 & -4 \end{array} \right)$$

Usamos el primer renglón para transformar los demás elementos de la primera columna a cero, aplicando:

$$\begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \end{array} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -7 & -16 \end{array} \right)$$

Luego, resolvemos la segunda columna. En ésta debemos tener 1 en el segundo renglón, y cero en el primero y tercero (no modifiquemos la primera columna). Aplicamos:

$$-\frac{1}{5}R_2 \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & -16 \end{array} \right)$$

Usemos ahora el segundo renglón para hacer que los otros elementos de la segunda columna sean cero. Aplicamos:

$$\begin{array}{l} R_1 - R_2 \\ R_3 - 2R_2 \end{array} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \end{array} \right)$$

Estas operaciones no alteraron la primera columna. Luego, reducimos la segunda columna a la forma requerida, con el uno en la diagonal principal y ceros en los otros dos elementos. Por último, convertimos la tercera columna, donde el tercer



componente es igual a uno; y los otros dos, a cero. En este ejemplo tenemos un cero en el segundo renglón, por tanto, sólo se convierte en cero el integrante del primer renglón. Aplicamos:

$$-\frac{1}{7}R_3 \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$R_1 - 2R_2 \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Así, hemos transformado las primeras tres columnas de la matriz aumentada del sistema a una matriz identidad. La matriz final es:

$$\begin{array}{l} x + 0y + 0z = 1 \\ 0x + y + 0z = -1 \\ 0x + 0y + z = 2 \end{array}, \text{ donde } \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{array}$$

De lo anterior, podemos deducir los siguientes pasos:

- Realizar operaciones entre renglones con objeto de obtener un componente superior igual a 1 en la primera columna.
- Sumar o restar los múltiplos correctos del primer renglón a los otros renglones de tal forma que los demás elementos de la primera columna sean cero.
- Sin alterar la primera columna, ejecutar las operaciones necesarias para tener el segundo elemento de la segunda columna segundo renglón igual a 1, y los otros componentes de la segunda columna igual a cero.
- Respetando la primera y segunda columnas, efectuar las operaciones requeridas para hallar el pivote igual a uno, y los otros elementos iguales a cero.
- Así, sucesivamente, llevar a cabo las operaciones indispensables con cada columna, a fin de obtener, del lado izquierdo de la línea vertical, la matriz identidad; y, del lado derecho, las soluciones del sistema de ecuaciones.



## Unidad 3. Cálculo diferencial

- 3.1. Límite de funciones
- 3.2. Funciones continuas y discontinuas
- 3.3. Derivada
- 3.4. Derivadas de orden superior
- 3.5. Máximos y mínimos
- 3.6. Aplicaciones de la derivada





## Objetivos particulares de la unidad

Al culminar el aprendizaje de la unidad, lograrás integrar los conceptos básicos del cálculo diferencial (límite, funciones, derivada, etcétera), para aplicarlos en la resolución de problemas que impliquen cambios.





El cálculo diferencial es una herramienta más de las matemáticas para los administradores, contadores e informáticos, pues **busca las tasas de cambio de los fenómenos, específicamente, la instantánea**. Para comprender cómo se puede calcular ésta por una función, debemos estudiar primero los conceptos de **límite y continuidad**.

Ya estás familiarizado con el concepto de tasa de cambio, que se asimila al de pendiente, que ya analizamos en la primera unidad y recordaremos con los siguientes ejemplos:

- En un día determinado, la tasa de cambio de pesos por dólar fue de \$9.20; eso significa que por cada dólar que yo pueda cambiar me darán nueve pesos con veinte centavos.
- En una carretera ascendente, hay una pendiente, que no es más que la relación de lo que se sube con lo que se avanza. Así, una pendiente de 5% indica que se aumenta cinco metros por cada cien que se adelanta horizontalmente.

El término *pendiente* que se maneja comúnmente se refiere exclusivamente a las rectas. Sin embargo, **todas las funciones que pueden graficarse, y no sólo la recta, tienen tasas de cambio (lo que sube o baja la función en el eje “Y” por cada unidad que avanza en el eje “X”)**. El inconveniente es que estas medidas de cambio no son constantes, pero pueden ser obtenidas: éste es precisamente el tema de nuestro estudio. **Hallar expresiones que representen la tasa de cambio de una función es el propósito del cálculo diferencial**. Para conocer este procedimiento, repasaremos brevemente, y de manera no formal, el concepto de función.

**Función** es una variable cuyo valor depende de otra variable. Lo que gana un trabajador a destajo en una semana (una variable) depende de las horas que trabajó durante ese lapso (otra variable). En notación de funciones, lo expresamos de la manera siguiente:



**Percepción = f (horas trabajadas).** La expresión anterior se lee así: “la percepción es función de las horas trabajadas”.

Si a la percepción la llamamos  $P$  y a las horas trabajadas,  $h$ , podemos indicarlo como  $P = f(h)$ . En esta notación, leemos que  $P$  es igual a  $f$  de  $h$ , o  $P$  es función de  $h$ . De esta manera, conociendo que a una persona en particular le pagan \$20.00/hora, su función de percepciones es  $P = 20h$ .

En matemáticas usamos frecuentemente las letras  $x$  e  $y$  para denotar las variables independiente y dependiente (o función), respectivamente. Por eso, muchas funciones quedan indicadas como  $y=f(x)$ . En el ejemplo del trabajador a destajo, la función se escribe  $y=20x$ . Si obtenemos la gráfica de esa función, encontraremos que ésta es lineal y su gráfica, una recta; sin embargo, hay muchas funciones cuya gráfica no es recta, pero son muy importantes desde el punto de vista del cálculo.

### 3.1. Límite de funciones

En cálculo, uno de los factores que deseamos conocer es el valor al que se acerca una función conforme la variable independiente se aproxima a otro valor específico.

Encontrar el límite de una función en el plano cartesiano cuando la variable independiente (que normalmente se maneja en el eje horizontal de las abscisas o de las “ $x$ ”) se acerca a determinado valor puede entenderse como la respuesta a la siguiente pregunta: ¿a qué altura (sobre el eje “ $y$ ” vertical o de las ordenadas) se acerca la gráfica de la función cuando la variable independiente se aproxima a “tal” valor? A esa altura, si existe, se le llama “límite” y podemos expresarla como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , cuyos símbolos leemos como “El límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende (o se acerca) al valor  $a$  es  $L$ ”. Tanto  $a$  como  $L$  son valores constantes.

Lo anterior quiere decir que **mientras más se acerque el valor de  $x$  al valor  $a$ , más se aproximará el valor de la función a la altura  $L$ .**



Hay muchas maneras de obtener el límite de una función. Una de ellas consiste en **sustituir en la variable independiente X valores cada vez más cercanos a a y observar cómo se comporta la función f(x)**. Esto puede hacerse acercándose al valor de  $a$  desde otros más pequeños, a partir de la izquierda (límite por la izquierda); o también desde valores más grandes, desde la derecha (límite por la derecha). Si el valor de la función se aproxima a  $L$ , conforme la variable independiente se acerca a  $a$  –desde la izquierda como desde la derecha–, decimos que el límite existe y que su valor es  $L$ . Esto, en notación matemática, se indica de la manera siguiente:

Por la derecha:  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$

Por la izquierda:  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$

Los signos (+) o (–) que aparecen a la derecha de  $a$ , como si fueran exponentes, indican, respectivamente, que nos estamos acercando a  $a$  desde la derecha o desde la izquierda.

Por ejemplo, si queremos obtener los límites por izquierda y derecha de  $f(x)=x^3$  cuando la variable independiente tiende a 2:

Aproximación:

Desde la izquierda		Desde la derecha	
Valor de x	Valor de $f(x)$	Valor de x	Valor de $f(x)$
1	1	3	27
1.5	3.375	2.5	15.625
1.9	6.858	2.1	9.261
1.99	7.881	2.01	8.121
1.999	7.988	2.001	8.012
1.9999	7.9988	2.0001	8.0012

Examinando la tabla anterior, podemos inferir que en la medida que  $x$  se acerca a 2,  $f(x)$  se va aproximando a 8 (tanto si lo hace por la izquierda como por la derecha). Además, concluimos que el límite de  $f(x)$ , cuando  $x$  se acerca a 2, es 8.



Otra manera de obtener el límite de una función **cuando la variable independiente se acerca a un determinado valor es sustituyendo ese valor en la función y ver lo que ocurre**. En el caso del ejemplo anterior, este método confirma nuestra inferencia anterior, ya que para  $f(x)=x^3$ : es cierto que  $f(2)=8$ . Sin embargo, esta manera, en apariencia tan cómoda, no siempre resulta. Por ejemplo, en la función  $f(x) = \frac{x}{x-2}$ , si tratamos de encontrar el límite cuando  $x$  tiende a 2, al sustituir, veremos que precisamente para este valor **la función no está definida**, pues nos encontramos ante una división por cero. Acercándonos por la izquierda, la función toma valores cada vez más grandes hacia abajo (negativos); pero si lo hacemos desde la derecha, la propia función adopta valores cada vez más grandes, pero hacia arriba (positivos), tal como lo muestra la tabla

Por izquierda		Por derecha	
$x$	$f(x) = \frac{x}{x-2}$	$x$	$f(x) = \frac{x}{x-2}$
1	-1	3	3
1.5	-3	2.5	5
1.9	-19	2.1	21
1.99	-199	2.01	201
1.999	-1999	2.001	2001
1.9999	-19999	2.0001	20001
1.99999	-199999	2.00001	200001

En esas condiciones, dado que el límite por la izquierda no es igual al de la derecha, éste en realidad no existe.

Los límites tienen estas propiedades:

- **Cuando  $f(x) = c$**

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$



Es decir, el límite de una constante es la propia constante, sin importar hacia qué valor se acerque la variable.

□ **Cuando**  $f(x) = x^n$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^n = a^n \quad \lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$$

Es decir, el límite de una potencia de  $x$  cuando  $f(x)$  tiende a un valor  $a$  es la misma potencia de éste.

□  $\lim_{x \rightarrow a} c f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , siempre que  $f(x)$  tenga límite

Es decir, el límite de una constante por una función es igual a la constante por el límite de la función, siempre que ésta posea límite.

□ **lim**  $f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , siempre que existan ambos límites

Es decir, el límite de un producto de dos funciones es igual al producto de los límites de cada una de ellas tomadas separadamente, siempre que ambos límites existan.

□ **lim**  $f(x) \pm g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Es decir, el límite de una suma o resta de dos funciones es igual a la suma o resta de los límites de cada una de ellas tomadas separadamente, siempre que ambos límites existan.



$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)/g(x)] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ , siempre que ambos límites existan y el límite de  $g(x)$  no

sea igual a cero

Algunas veces, el trabajo con límites lleva a expresiones que no pueden ser evaluadas matemáticamente, como divisiones entre cero, o cero entre infinito. En esos casos, hay artificios que regularmente permiten obtener el límite. A continuación, se presenta un ejemplo de esta naturaleza.

En matemáticas financieras, el valor presente<sup>2</sup> de un conjunto de pagos periódicos iguales a recibir en un futuro (anualidad) se obtiene mediante la expresión siguiente:

$$A = R \left[ \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$$

$R$  indica la cantidad que se abona periódicamente (mensual, bimestral, anualmente, etcétera),  $i$  es la tasa por lapso a la que se invierte el dinero y  $n$  el número de pagos o exhibiciones y el de periodos que dura la operación. **Para calcular el valor presente de un conjunto muy grande de pagos que se recibirán en el futuro, se debe evaluar la expresión arriba indicada cuando  $n$  se acerca a infinito.** Expresado en términos formales queda:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R \left[ \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$$

Damos por sentado que conocemos los valores de  $R$  e  $i$ .

---

<sup>2</sup> El valor presente es el equivalente de un pago o de un conjunto de pagos que se recibirá en el futuro.



Según las propiedades de los límites ya vistos, deberíamos elevar la expresión  $(1+i)$  a “menos infinito”. En primera instancia, parece que no tiene mucho sentido, pero las siguientes manipulaciones nos pueden orientar:

Sabemos que  $(1+i)^{-n} = \frac{1}{(1+i)^n}$ . Si  $n$  es muy grande, lo será también  $(1+i)^n$ ; y, por lo mismo,  $\frac{1}{(1+i)^n}$  será muy pequeño. Si  $(1+i)^n$  se acerca al infinito,  $\frac{1}{(1+i)^n}$  se aproximará a cero. Por ello, la expresión  $1 - (1+i)^{-n}$  se acercará a 1.

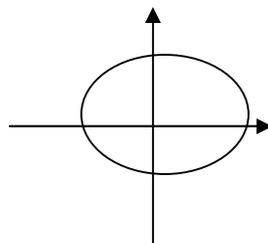
Dado lo anterior:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R \left[ \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] = \frac{R}{i}$$

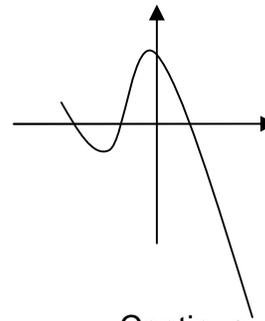
Entonces, el valor presente de una anualidad en la que el número de pagos se aproxima al infinito (anualidad perpetua) será simplemente **el resultado de dividir el valor de un pago periódico o renta entre el de la tasa de interés considerada para la operación**. (Hay diversas técnicas que nos permiten trabajar los límites cuando la variable independiente tiende al infinito, pero no es el objetivo de estos apuntes, por lo que te remitimos a la bibliografía correspondiente).

### 3.2. Funciones continuas y discontinuas

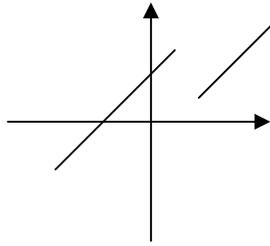
En el cálculo diferencial trabajamos con funciones continuas. El concepto de continuidad es fácil de entender intuitivamente: **una función es continua en tanto que no necesitamos levantar el lápiz del papel para dibujar su gráfica**; pero cuando lo levantamos, se produce una discontinuidad:



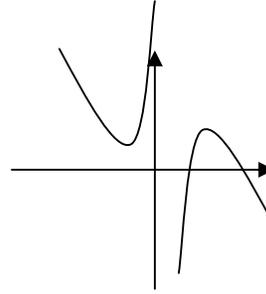
Continua



Continua



Discontinua



Discontinua

Puntualmente, **una función es continua en a si el límite de F(x), cuando x tiende a a, es igual a F(a).**

Si  $f(x) = 3x + 4$ , queremos obtener  $\lim_{x \rightarrow 5} (3x + 4) = 19$ .

Encontramos lo anterior sustituyendo directamente el 5 en la función, o acercándonos a 5 por izquierda y derecha:

Derecha  $\lim_{x \rightarrow 5^+} (3x + 4) = ?$       Izquierda  $\lim_{x \rightarrow 5^-} (3x + 4) = ?$

Resultados:

	Por izquierda		Por derecha
X	$f(x) = 3x + 4$	x	$f(x) = 3x + 4$
4	16	6	22
4.5	17.5	5.5	20.5
4.9	18.7	5.1	19.3
4.99	18.97	5.01	19.03
4.999	18.997	5.001	19.003
4.9999	18.9997	5.0001	19.0003
4.99999	18.99997	5.00001	19.00003



Se puede observar que aproximándose tanto por izquierda como por derecha, el valor de la función se acerca a 19. Esto confirma nuestro primer trabajo: sustituir directamente el 5 en la función.

Desde este punto de vista, para que **una función sea continua en cualquier punto deben cumplirse las condiciones siguientes: que exista la función para ese punto; que haya límite y para ese valor; y que ambos sean iguales**, como se vio en el ejemplo anterior (donde el límite y el valor de la función son 19, respectivamente). Al ser iguales, límite y función, podemos afirmar que en (5,19) la función es continua.

En el ejemplo siguiente la función no es continua en algún punto:

Tratemos de obtener el límite de la función  $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ . Se escribe  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

Si queremos sustituir directamente los valores en la función, hallamos una indeterminación, pues  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^2 - 4}{2 - 2}$  nos da 0/0. Si tratamos de acercarnos por izquierda y derecha, encontraremos los datos asentados en la tabla siguiente:

	Izquierda		Derecha
	$\frac{x^2 - 4}{x - 2}$		$\frac{x^2 - 4}{x - 2}$
X		X	
0.5	2.5	3.5	5.5
1.5	3.5	2.5	4.5
1.9	3.9	2.1	4.1
1.99	3.99	2.01	4.01
1.999	3.999	2.001	4.001

Podemos observar que conforme la variable independiente se acerca a 2, la función se aproxima a 4, tanto por izquierda como por derecha. Entonces, **la función tiene una discontinuidad exactamente en el punto donde la variable independiente (x) es igual a dos.**



Podemos decir que  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$

Esto lo corroboramos por una factorización sencilla:  $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$ . Se simplifica  $(x - 2)$  en el denominador

con  $(x - 2)$  en el numerador. La función es discontinua cuando  $x$  toma el valor de 2.

NOTA: la primera función no es exactamente igual a la segunda, dado que tiene un punto de discontinuidad. Sin embargo, el ejemplo nos ayuda a aclarar que conforme la variable independiente se acerca a 2, efectivamente la función se aproxima a 4 (aunque en este caso el 4 nunca se alcance dada la discontinuidad ya citada). De hecho, la gráfica de la primera función es una recta con una discontinuidad, donde  $x$  es igual a 4. La gráfica de la segunda función es una recta muy parecida, pero sin discontinuidad.

Finalmente, una función **es continua en un intervalo si lo es para todos los puntos en ese intervalo**. Este concepto es importante para el cálculo diferencial porque la obtención de derivadas solamente es posible para funciones continuas.

### 3.3. Derivada

Para comprender el concepto de derivada, debemos unir dos aspectos ya vistos: pendiente o tasa de cambio y límite. La **derivada es el límite del cociente que resulta de dividir el incremento de la función entre el incremento de la variable independiente cuando éste tiende a cero**. Formalmente, se indica:

La derivada  $\lim \frac{\delta y}{\delta x}$  se lee como el límite de delta y entre delta x

Pasos para obtener la derivada de una función:



- Asignar un incremento a la variable independiente.
- Encontrar el incremento de la función.
- Obtener el cociente de los incrementos.
- Calcular el límite de ese cociente cuando el incremento de  $x$  tiende a cero.

Presentamos a continuación un ejemplo del cálculo de la derivada siguiendo los cuatro pasos:

Caso: si  $y = x^2$ , encuentra la derivada.

a) Se asigna un incremento a la variable independiente al que denominamos  $\Delta x$ . Recordemos que la letra griega  $\Delta$  (delta mayúscula) se usa ordinariamente en las disciplinas cuantitativas para denotar incremento. Entonces,  $\Delta x$  es  $\Delta$ , símbolo con el que indicamos el aumento de la variable independiente de una manera genérica.

b) Se encuentra el incremento de la función. Recordemos que éste es precisamente “lo que aumentó o lo que se agregó”. Para obtenerlo, establecemos el valor final y le restamos el inicial. La diferencia es precisamente el aumento.

En nuestro ejemplo,  $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2$ . Por ello,  $y = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2$ .

Resumiendo,  $\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$ . Ya que  $x^2$  se cancela con  $-x^2$

c) Se obtiene el cociente de los incrementos. Al hacer la división  $\Delta y / \Delta x = (2x\Delta x + (\Delta x)^2) / \Delta x = 2x + \Delta x$

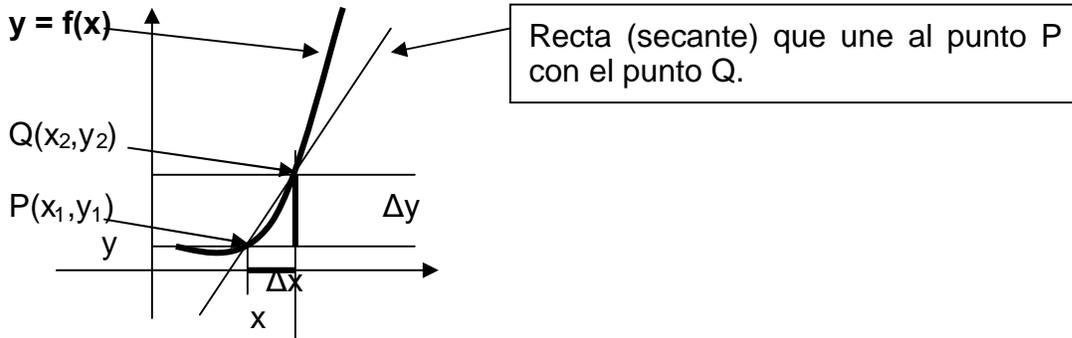
d) Se calcula el límite de ese cociente cuando el incremento de  $x$  tiende a cero.

$\lim(2x + \Delta x) = 2x$ . Esto se debe a que el incremento de  $x$  ( $\Delta x$ ) se hace tan pequeño  $\Delta x \tilde{\Delta}$  (tiende a cero) que prácticamente desaparece.

Obtenido el límite, hemos encontrado la derivada de  $x^2$  respecto de  $x$ :  $2x$ .

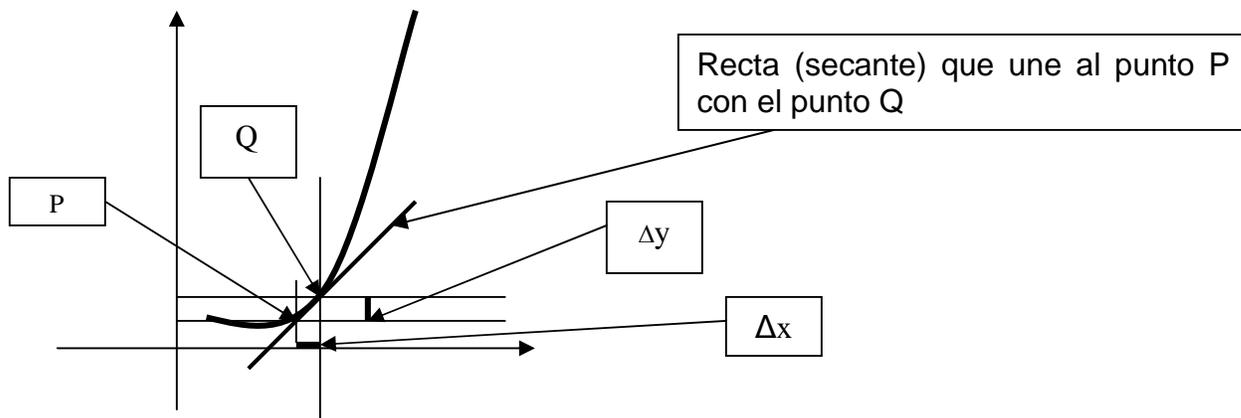


## Interpretación geométrica de la derivada

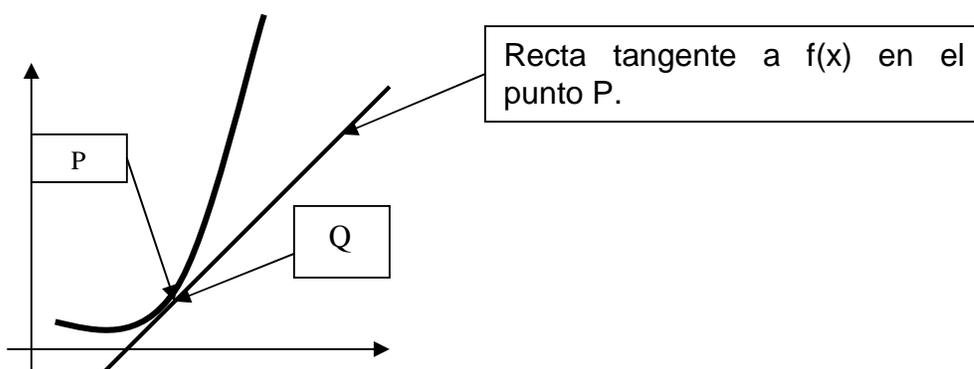


Si tenemos una función cualquiera de  $x$ , como la que aparece en la figura anterior, podemos visualizar el trabajo de obtener la derivada de la manera siguiente:

- Partimos de un punto  $P$  cualquiera y le damos un incremento a la variable independiente; esto aparece representado en nuestra figura como  $\Delta x$ . (Éste es el primero de los cuatro pasos que ya vimos para obtener la derivada).
- Al darle a la función este incremento, su gráfica se desplaza tanto a la derecha (el propio  $\Delta x$ ) como hacia arriba, en la distancia que está marcada como  $\Delta y$ . La combinación de ambos aumentos nos lleva al punto  $Q$ . Este es el segundo de los pasos para la derivación.
- El tercer paso de la derivación consiste en obtener el cociente  $\Delta y / \Delta x$ . Así, damos con la pendiente de la recta que une los puntos  $P$  y  $Q$ . Si encontramos este cociente, estamos localizando la pendiente de la recta que une a los puntos  $P$  y  $Q$  (secante a la curva).
- Para el cuarto paso, es decir, la obtención del límite del cociente cuando  $\Delta x$  tiende a cero, es conveniente observar la gráfica siguiente:



En esta figura, el incremento de  $x$  se ha hecho más pequeño. Y si logramos que sea efectivamente tan reducido, de modo que  $P$  y  $Q$  prácticamente se encimen, estaremos obteniendo también la pendiente de una recta, pero en este caso ya no será secante a la curva (“secar” significa también cortar), sino tangente a ésta. Es decir, simplemente la tocará, pues los puntos  $P$  y  $Q$  están tan cerca que la recta no alcanza a cortar ningún segmento de la curva, tal como se puede intuir del esquema siguiente. Entonces, **la derivada es la expresión general de la pendiente de la tangente a la curva en cualquier punto que se desee.**



### Nomenclatura de la derivada

Diversos autores han propuesto maneras de denominar la derivada de una función. A continuación, presentamos las tres más comunes (recordemos que la derivada de  $x^2$  es  $2x$ ).



Si nuestra función es  $y=x^2$ , tenemos:  $D_x(x^2)=2x$  ;  $y'_x=2x$  ;  $dy/dx=2x$ .

Las tres expresiones se leen de manera parecida:

- La primera indica que la derivada de  $x^2$  en relación con  $x$  es igual a  $2x$  (la pequeña  $x$  después de la  $D$  señala la variable con la cual estamos derivando; lo mismo sucede con la pequeña  $x$  después de la  $y'$  en la siguiente expresión).
- La segunda dice que la derivada de  $y$  en relación con  $x$  es igual a  $2x$ .
- La última indica que la derivada de  $y$  en relación con  $x$  es igual a  $2x$ . Esta nomenclatura requiere una pequeña aclaración: la  $d$ , en cada caso, significa literalmente diferencial, por lo que la expresión, también literalmente, alude que "la diferencial de  $y$  entre la diferencial de  $x$  es igual a  $2x$ ". (El concepto de diferencial se estudiará más adelante).

### 3.4. Derivadas de orden superior

**La derivada de una función es otra función que, a su vez, es frecuentemente derivable.** Así, podemos derivar sucesivamente una función: al producto de la primera derivación lo llamamos primera derivada; al de la segunda, segunda derivada, y así respectivamente. En general, a las derivadas, después de la primera, se les nombra derivadas de orden superior. A veces el proceso es cada vez más simple, como en las funciones polinomiales; pero otras, las funciones se tornan más complicadas. A continuación, damos algunos ejemplos de las derivadas de orden superior así como de su nomenclatura.

Si tenemos la función

$$y = 3x^3 - 4x$$

Su primera derivada es:

$$y' = 6x^2 - 4$$

Su segunda derivada es:

$$y'' = 12x$$



Su tercera derivada es:

$$y''' = 12$$

Y su cuarta derivada es:

$$y^{IV} = 0$$

En la nomenclatura de Leibniz, las derivadas sucesivas se simbolizan así:  $dy/dx$ ;  $d^2y/dx^2$ ;  $d^3y/dx^3$ ;  $d^4y/dx^4$ ;  $d^5y/dx^5$

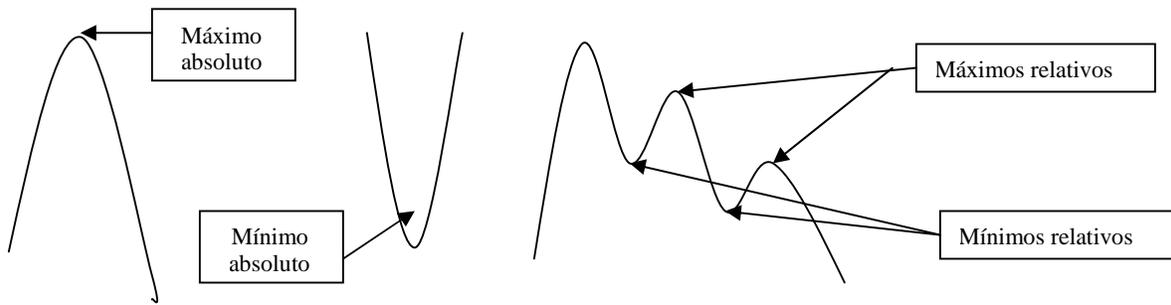
### 3.5. Máximos y mínimos

Una de las aplicaciones de la derivación consiste en encontrar los **puntos óptimos de una función**. Éstos son los mínimos (por ejemplo, en el caso de los costos), o los máximos (si buscamos, por ejemplo, maximizar utilidades o ingresos). De esta manera, el ingreso óptimo es el máximo; y el costo óptimo, el mínimo.

Un punto máximo, al que denominaremos  $(a, f(a))$  de una función  $f(x)$  en un intervalo cualquiera (que contenga al valor  $a$ ), se encuentra si  $f(a)$  **es mayor o igual que cualquier  $f(x)$  dentro del intervalo**. Esto quiere decir que el punto **es el más alto** de la gráfica de la función en el intervalo dado.

Un punto mínimo al que llamaremos  $(a, f(a))$  de una función  $f(x)$  en un intervalo cualquiera (que contenga al valor  $a$ ), se encuentra si  $f(a)$  **es menor o igual que cualquier  $f(x)$  dentro del intervalo**. Ello significa que el punto señalado **es el más bajo** de la gráfica de la función en el intervalo dado.

Puede haber varios máximos y mínimos en una función, tal como se ve en la figura siguiente:



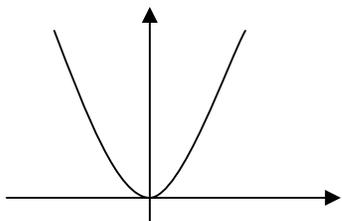
### Puede haber máximos y mínimos absolutos y relativos.

Se dice que un punto  $(a, f(a))$  es un máximo absoluto de una función si  $f(a) > f(x)$  para cualquier otra  $x$  en el dominio de la función. Esto quiere decir que, si dibujamos la gráfica de toda la función, el punto  $(a, f(a))$  es el más alto de toda la gráfica. Por otro lado, un punto  $(a, f(a))$  es mínimo absoluto de una función si  $f(a) < f(x)$  para cualquier otra  $x$  en el dominio de la función. Ello significa que, si dibujamos la gráfica de toda la función, el punto  $(a, f(a))$  es el más bajo de toda la gráfica.

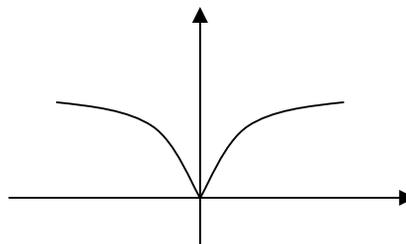
Para que exista un punto extremo (máximo o mínimo) en  $(a, f(a))$ , **deben cumplirse las condiciones siguientes** (necesarias, pero no suficientes):

- La función debe estar definida para  $a$ , es decir,  $f(a)$  debe ser real.
- La derivada de la función es igual a cero en  $a$ , es decir,  $f'(a) = 0$ . O la derivada de la función no está definida para  $a$ , es decir,  $f'(a)$  no está definida.

A continuación, presentamos los ejemplos de dos funciones que cumplen ambas condiciones:



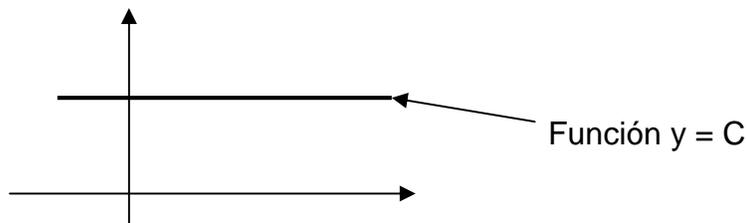
Función  $y = x^2$ ;



Función  $y = x^{2/3}$



Como se puede ver muy bien en la siguiente gráfica, **las funciones constantes no tienen máximos ni mínimos**, pues su pendiente constante es igual a cero:

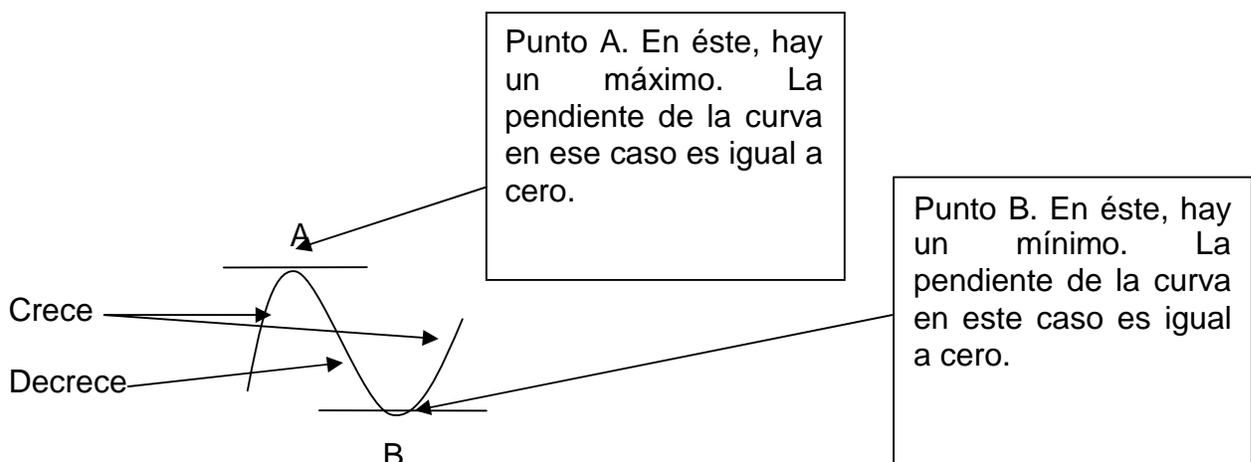


### Criterios de optimación

En la sección anterior, se definieron las condiciones que necesita cumplir una función para tener puntos extremos (máximos o mínimos), pero no se especificó cómo proceder para encontrarlos. Enseguida veremos tres criterios que nos permiten localizar esos puntos: el de la primera y segunda derivadas, y el de las de orden superior. Los estudiaremos uno por uno. En todos ellos, debemos:

- Encontrar en qué puntos la derivada es cero o no está definida.
- Definir si en esos puntos nos encontramos ante un máximo, un mínimo, o ninguno de los dos.

El motivo por el que puede haber un punto extremo donde la derivada es igual a cero se puede intuir de la figura siguiente:



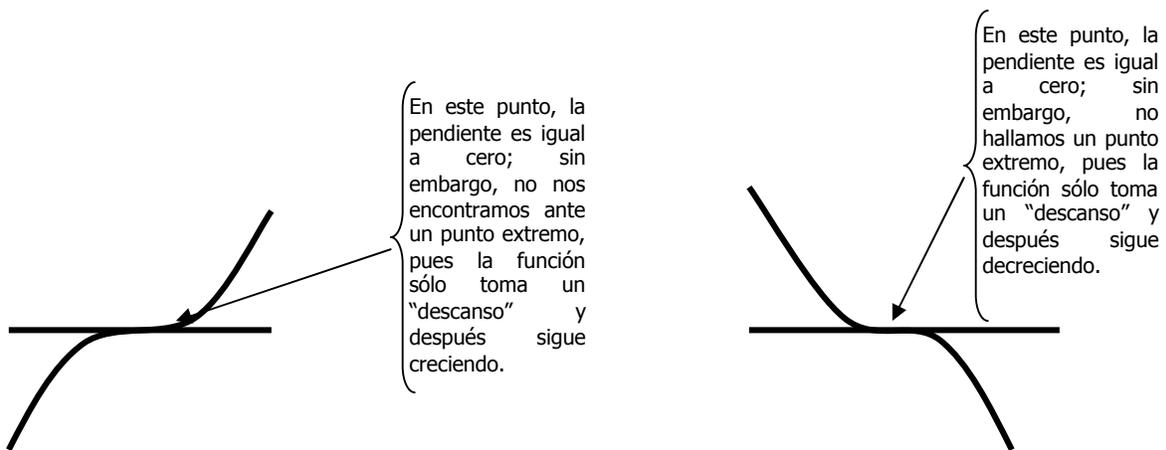
En el punto A tenemos un máximo porque la gráfica que va subiendo de izquierda a derecha (la pendiente es positiva) empieza a suavizar su pendiente hasta



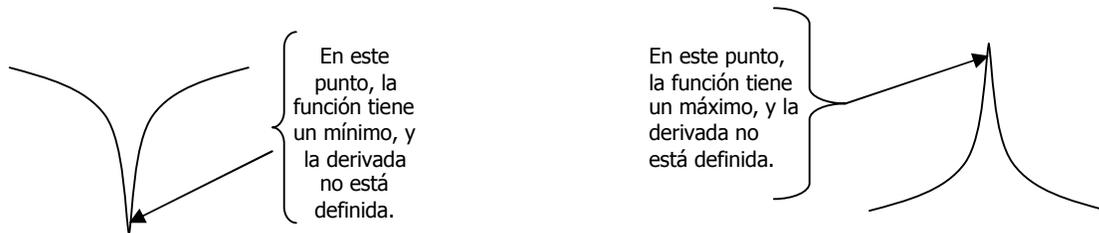
hacerse **cero**. A partir de ese momento, la función decrece y su gráfica comienza a ir hacia abajo. Cuando esto sucede nos encontramos ante un máximo.

El razonamiento contrario lo podemos aplicar en el punto B, pues a la izquierda de éste la función decrece y su pendiente es negativa. Poco a poco, la pendiente se hace más suave hasta volverse **cero**, y a la derecha de ese punto la función comienza a ascender.

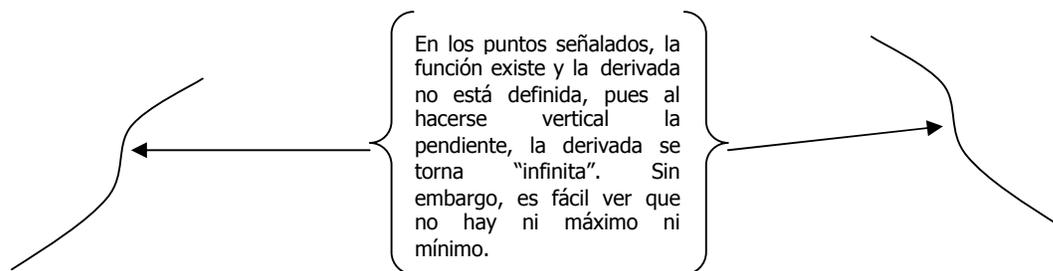
Puede darse el caso de que la pendiente sea cero; sin embargo, **no existir ni máximo ni mínimo**, tal como se puede observar en las siguientes figuras:



El motivo por el cual puede haber un punto extremo donde la derivada no esté definida pero la función sí, puede intuirse de la figura siguiente:



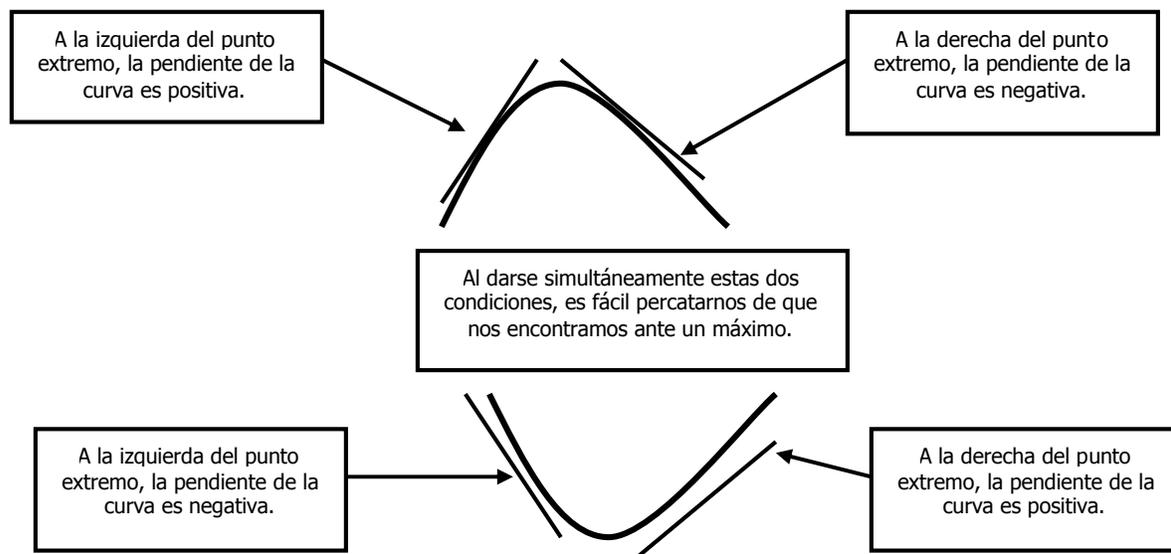
En las siguientes figuras, las derivadas no están definidas en los puntos señalados (aunque sí la función), y nos encontramos que **las funciones no tienen** máximo ni mínimo en esos puntos:



### Criterio de la primera derivada

En la sección anterior, examinamos las condiciones necesarias para que exista un punto extremo (máximo o mínimo). Estas condiciones, aunque necesarias, no son suficientes. Para que un punto sea máximo, o mínimo, los puntos en su entorno (a izquierda y derecha) deben tener las siguientes características:

- **Si es máximo**, los puntos a la izquierda y derecha deben ser menores (más abajo). Por ello, la pendiente a la izquierda del punto debe ser positiva (está subiendo hacia el punto); y a la derecha, negativa (está bajando desde el punto).
- **Si es mínimo**, los puntos a la izquierda y derecha deben ser mayores (más arriba). Por ello, la pendiente a la izquierda del punto debe ser negativa (está bajando hacia el punto); y a la derecha, positiva (está subiendo desde el punto).





Al darse simultáneamente estas dos condiciones, es fácil saber que estamos ante un mínimo.

Dado lo anterior, el criterio de la primera derivada nos indica que si en un punto ésta es igual a cero, o no está definida; y en el entorno de ese punto se tiene que a la izquierda la derivada es positiva y a la derecha, negativa, nos encontramos ante **un máximo**. Pero si la izquierda es negativa y la derecha, positiva, tenemos **un mínimo**. En caso de que sea positiva o negativa en ambos lados, **no hay ni máximo ni mínimo**.

Los siguientes ejemplos nos muestran cómo trabajar con el criterio de la primera derivada.

- Encuentra, en caso de que existan, los puntos extremos de la función  $y=3x^2-6x$ . La derivada es  $y'=6x-6$ . Al igualarla a cero, queda  $6x-6=0$ ; por lo mismo,  $6x=6$ ; lo que nos lleva a que  $x=1$ . Ya aclaramos que hay un punto extremo en  $x$  igual a 1, ahora nos falta encontrar el valor de  $y$ , e investigar si el punto localizado es un máximo, un mínimo o ninguno de ambos.
- Para hallar el valor de  $y$ , sustituimos el valor de  $x$  en la función original. Con ello obtenemos que  $y=3(1)^2-6(1)=-3$
- Entonces, tenemos un punto extremo  $E$  en el punto  $(1,-3)$ , pero debemos investigar si es máximo o mínimo. Para ello, procedemos de la manera siguiente:
  - En el entorno de  $E$ , damos un valor a la izquierda (más pequeño) e investigamos el signo de la pendiente (la derivada) en ese punto. Un valor a la izquierda de 1 es, por ejemplo, 0, y al sustituirlo en la derivada, encontramos  $y'=6(0)-6$ ; esto es,  $-6$ . La derivada, y con ella la pendiente, de la función a la izquierda del punto extremo  $E$  es negativa.
  - En el entorno de  $E$ , asignamos un valor a la derecha (más grande) e investigamos el signo de la pendiente (la derivada) en ese otro punto. Un valor a la derecha de 1 es, por ejemplo, 2, y al sustituirlo en la derivada, tenemos



que  $y' = 6(2) - 6$ , esto es, 6. La derivada, y con ella la pendiente, de la función a la derecha del punto extremo  $E$  es positiva.

De acuerdo con nuestra regla de la primera derivada, si la pendiente es igual a cero en un punto  $y$ , adicionalmente, a la izquierda de la función es negativa y a la derecha, positiva, nos encontramos ante un mínimo. Por ello, podemos concluir que nuestra función tiene un punto extremo en  $E(1, -3)$ , y que ese punto es un mínimo.

### **Criterio de la segunda derivada**

El criterio de la primera derivada es útil, pero puede ser un poco engorroso. En ese caso, tenemos la alternativa de la segunda derivada, que nos indica lo siguiente:

Si la primera derivada es igual a cero, o no existe; y la segunda, positiva, nos encontramos ante un mínimo. Y si la primera derivada es igual a cero, o no existe; y la segunda, negativa, nos encontramos ante un máximo.

### **Mecánica y ejemplos**

Si se desea obtener los puntos extremos de una función utilizando el criterio de la segunda derivada, procedemos así:

Ejemplo:  $y = x^2 - 4x$

- Hallamos la primera y segunda derivadas:

Primera:  $y' = 2x - 4$

Segunda:  $y'' = 2$

- Se investiga el signo de la segunda derivada. Si es positivo (como en este caso), estamos ante un mínimo; en caso contrario, ante un máximo. Si la



derivada tiene valor de cero, se deberá recurrir al criterio de la primera derivada.

- Se obtiene la localización de los puntos extremos. Para ello, se iguala la primera derivada a cero para obtener la abscisa de los puntos:

Si  $2x-4=0$ , entonces,  $x=2$

Para encontrar la ordenada, sustituimos en la función original:  $y=2^2-4(2)=-4$ . Ello nos indica que hay un punto extremo  $E(2,-4)$ , que es un mínimo, de acuerdo con el criterio de la segunda derivada, pues esta última es positiva.

Ejemplo:  $y=x^3-9x^2$

- Hallamos sucesivamente la primera y segunda derivadas:

Primera:  $y'=3x^2-18x$

Segunda:  $y''=6x-18$

- En este caso, el signo de la segunda derivada no es evidente. Para conocerlo, debemos igualar a cero la primera derivada.  $3x^2-18x=0$  es una ecuación de segundo grado; al resolverla, obtenemos dos valores:  $x_1=0$ , en tanto que  $x_2=6$ . Esta solución nos indica que la función tiene dos puntos extremos; uno en el lugar donde  $x=0$ , y otro donde  $x=6$ . Es necesario encontrar la ordenada de cada uno de esos puntos (en la función original) y luego investigar, en cada caso, si se trata de un máximo o un mínimo. A continuación, se hacen las sustituciones correspondientes:

Para  $x_1$ :  $y_1=(0)^3-9(0)^2=0$

Para  $x_2$ :  $y_2=(6)^3-9(6)^2=-108$

Tenemos, entonces, dos puntos extremos:  $E_1(0,0)$  y  $E_2(6,-108)$ .

- Falta investigar, para cada uno de los puntos extremos, si se trata de un máximo o de un mínimo. Para ello sustituimos el valor de la abscisa ( $x$ ), y obtenemos el signo de cada uno de los puntos en la segunda derivada:



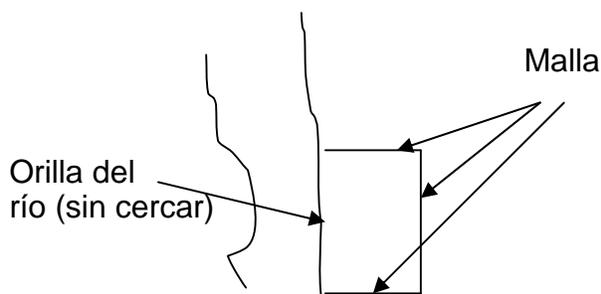
- Para  $x_1$  tenemos  $y''=6(0)-18=-18$ , lo que constituye un valor menor que cero (es decir, negativo). Por eso, el punto  $E_1$  es un máximo.
- Para  $x_2$  tenemos  $y''=6(6)-18=18$ , lo que constituye un valor mayor que cero (es decir, positivo). Por eso, el punto  $E_2$  es un mínimo.

### 3.6. Aplicaciones de la derivada

Frecuentemente, en las disciplinas que se estudian en nuestra Facultad, es necesario aprovechar de manera óptima diferentes situaciones. A continuación, desarrollamos problemas de maximización y minimización que trabajan este aspecto.

#### Problema 1. Maximización de área

Un pequeño balneario ejidal recibe un donativo de 300m lineales de malla ciclónica para cercar el área que colinda con el río –principal atracción del lugar–. Los ejidatarios desean utilizar la malla de tal manera que se maximice el área cercada en un rectángulo, de acuerdo con el esquema que a continuación se encuentra. Indica el largo y el ancho que debe tener la malla.



- Debemos encontrar una función de área, dado que es eso precisamente lo que pretendemos maximizar. La superficie del rectángulo está dada por la fórmula  $A=bh$ , en donde  $A$  es el área;  $b$ , la base del rectángulo; y  $c$ , su altura. Si tratamos de encontrar puntos óptimos en esa función, descubrimos tres variables (dos independientes [ $b$  y  $h$ ] y una dependiente [ $A$ ]). Como sabemos trabajar nada más con dos variables (independiente y dependiente), debemos expresar una variable dependiente en función de la otra. En este caso, el problema es sencillo, dado que solamente se tienen 300 lineales de malla. Por



lo mismo, y de acuerdo con la figura (base del rectángulo), sus lados inferior, superior y derecho (altura) deben sumar 300 m:  $2b+h=300$ . Por ello,  $h=300-2b$ .

- Sustituyendo en la función original, hallamos que  $A=b(300-2b)$  y, desarrollando el producto,  $A=300b-2b^2$ .
- Tratamos de encontrar puntos extremos a la función con el criterio de la segunda derivada:

$$\text{Si } A=300b-2b^2$$

$$A'=300-4b$$

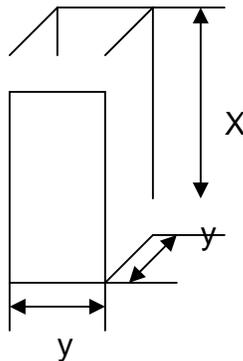
$$A''=-4$$

Lo anterior nos indica que el punto que localizaremos será un máximo.

- Para hallar la abscisa del punto óptimo, igualamos la primera derivada a cero:  $300-4b=0$ . Por lo mismo,  $b=75$ .
- Para encontrar el valor de  $h$ , sustituimos en la función correspondiente la longitud de la cerca:  $2(75)+h=300$ . Por ello,  $h$  es igual a 150.
- Y al sustituir los valores de  $h$  y  $b$  en la función del área,  $A=11250\text{m}$ , la mayor que puede cercarse en esas condiciones.

### Problema 2. Minimización de área

Una pequeña fábrica recibe un contrato para producir recipientes metálicos de base cuadrada y sin tapa, con una capacidad de un litro (mil centímetros cúbicos). Dado que la materia prima es costosa, el objetivo es minimizar el área total del recipiente, conservando siempre la capacidad de un litro. La siguiente figura nos ayudará a visualizar el caso:





- En éste, como en el problema anterior, debemos encontrar una función de área. El área del recipiente se conforma por el de las cuatro caras más el del piso del mismo. Para facilitar el planteamiento del problema, hemos definido las variables de acuerdo como aparecen en la figura: la altura del recipiente se denomina  $x$  y cada uno de los lados de la base,  $y$ . Cada una de las cuatro caras tiene un área de  $xy$  (recordemos que la base es cuadrada). El área del piso es  $y^2$ , luego, el área total del recipiente está dada por la siguiente expresión:  $A=4xy+y^2$
- Como esta función también consta de tres variables, debemos hallar la manera de expresar una de las dependientes en función de la otra. Para eso, nos valemos del volumen, dado por la siguiente expresión:  $V=xy^2$ . De acuerdo con las condiciones del problema, el volumen está fijo en un litro o mil centímetros cúbicos, es decir,  $xy^2=1000$ . Al despejar, tenemos:  $x=1000/y^2$ .
- Al sustituir en la función original, ésta nos queda como  $A=4(1000/y^2)y+y^2$ . Por eso:  $A=4000/y+y^2$ . En la búsqueda de puntos extremos, ya podemos derivar esta función:  

$$A=4000/y+y^2$$

$$A'=-4000/y^2+2y$$

$$A''=8000/y^3+2$$
. Hasta no saber el valor de  $y$  no podremos determinar el signo de la segunda derivada; pero sí adelantamos que, para todos los valores positivos de  $y$ , la segunda derivada será positiva, y nos encontraremos ante un mínimo.
- Igualamos la primera derivada a cero para identificar el valor (o valores) de  $y$  en el que encontramos un punto extremo. Luego,  $-4000/y^2+2y=0$ . Resolviendo la ecuación:  $y=12.6$ , aproximadamente. Dado que es un valor positivo, podemos afirmar que hemos localizado un mínimo. Y el valor de  $x$  lo hallamos en la sustitución correspondiente:  $x=1000/y^2$ , es decir:  $x=1000/158.76=6.30$ .
- Sustituyendo los valores tanto de  $x$  como de  $y$  en la función del área, encontramos que ésta es  $A=4(6.30)(12.6)+12.6^2=476.28\text{cm}$ .
- A manera de verificación, obtendremos el volumen del recipiente con la función ya definida de  $V=xy^2$ . Y tenemos que  $V=6.30*12.6^2=1000.188$ . El resultado



está muy próximo a lo buscado, pues la pequeña inexactitud que encontramos se debe a los redondeos.



## Unidad 4. Cálculo integral

- 4.1. Integral indefinida
- 4.2. Integral definida
- 4.3. Métodos de integración
- 4.4. Aplicaciones de la integral





## Objetivos particulares de la unidad

Al culminar el aprendizaje de la unidad, lograrás utilizar los elementos del cálculo integral para la resolución de problemas de relación de una cantidad con otra, conocida la razón de cambio.





En la presente unidad, enfocaremos nuestra atención hacia dos aspectos del cálculo integral:

- **Obtener la función original partiendo del conocimiento de su derivada.** En este rubro, estudiaremos las fórmulas y procedimientos que permiten, a partir de una derivada ya conocida, encontrar la función de la que se alcanzó aquélla. (A esto se le conoce como la obtención de la integral indefinida).
- **Obtener las áreas que se encuentran entre diversas curvas.** (A este procedimiento se le conoce como la obtención de la integral definida).

Es incómodo resolver algunas integrales directamente de la aplicación de una sola fórmula; deben seguirse distintos procedimientos que permitan llegar a una solución, los cuales son conocidos como **métodos de integración**. Por otro lado, es necesario aclarar que si comúnmente la derivación es posible para todo tipo de funciones (continuas), la integración no siempre lo es. Sin embargo, los ejemplos y aplicaciones que se manejan en este curso son sencillos y, en general, se pueden integrar.

Una vez dominados los aspectos anteriores, nos dedicaremos a identificar y trabajar las aplicaciones que tiene el cálculo integral en las disciplinas que se estudian en la Facultad.

#### **4.1. Integral indefinida**

Si tenemos dos funciones:

- $F(x)$
- $f(x)$ ,

puede suceder que  $F'(x)=f(x)$ . En ese caso, decimos que  $F(x)$  es la antiderivada de  $f(x)$ . Por ejemplo, si decimos que  $F(x)=x^3$  y que  $f(x)=3x^2$ ; entonces, dado que la derivada de  $x^3$  es  $3x^2$ ,  $x^3$  es la antiderivada de  $3x^2$ . Observamos que  $x^3 + 3$  ó  $x^3 + 8$  son asimismo antiderivadas de  $3x^2$ , pues al derivarlas obtenemos precisamente la misma función (difieren únicamente en una constante).



Podemos expresar, de manera general, la antiderivada de  $3x^2$  como:

$\int 3x^2 dx = x^3 + C$  ; en donde  $C$  es la expresión de una constante cuyo valor desconocemos al principio (constante de integración), y que implica, por así decirlo, el reconocimiento de una constante cuyo valor ignoramos (en nuestros ejemplos anteriores fueron 3 y 8, pero puede ser cero). En la expresión que está al principio del párrafo encontramos el símbolo de la integral,  $\int dx$ , una especie de S alargada y  $dx$  (diferencial de  $x$ ), ésta es parte de la notación de la integral e indica la variable (en este caso  $x$ ) en relación con la cual estamos integrando.

De manera más formal podemos decir que la integral indefinida de cualquier función dada  $f(x)$  es:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Esto será cierto, sin embargo, solamente si  $F'(x) = f(x)$

Ejemplo:

Encuentra  $\int 20dx$

En este nivel, solamente procederemos por tanteos, pero podemos llegar a la expresión  $20x$ , puesto que si derivamos  $20x$ , el resultado es 20. Entonces, expresamos:

$$\int 20dx = 20x + C$$

Trabajar por tanteo conduce a una pérdida de tiempo, por lo cual ha sido desarrollado un conjunto de fórmulas que nos pueden auxiliar a integrar de manera más directa. Las desglosamos enseguida y, posteriormente, damos ejemplos de cada una de ellas.

#### **Fórmula 1**

$$\int kdx = kx + C \quad (k \text{ es una constante cualquiera})$$

Indica cuál es la integral de una constante.



Ejemplo:

$$\int 23dx = 23x + C$$

### Fórmula 2

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

NOTA:  $n$  no puede ser igual a  $-1$ .

Esta fórmula señala que la integral de la variable independiente, elevada a un exponente numérico, es la propia variable independiente, elevada a una unidad más que el exponente original; y dividida, asimismo, entre el valor del exponente original adicionado de una unidad.

Ejemplo:

$$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{x^5}{5} + C$$

Ejemplo:

$$\int x^{-7} dx = \frac{x^{-7+1}}{-7+1} + C = \frac{x^{-6}}{-6} + C = -\frac{1}{6x^6}$$

### Fórmula 3

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Indica que la integral de  $e^x$  es la propia  $e^x$ , lo que es consistente con la fórmula de la derivada de esta función.

### Fórmula 4

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx \quad (k \text{ es una constante cualquiera})$$

Expresa que una constante que multiplica a cualquier función puede entrar o salir del signo de integral sin afectar al resultado.



Ejemplo:

$$\int 21x^3 dx = 21 \int x^3 dx = 21 \frac{x^4}{4} + c = \frac{21x^4}{4} + C$$

Podrá extrañarte que la C no se multiplique por 21. La razón es muy simple: siendo C un valor constante que no conocemos, multiplicado por cualquier constante, seguirá siendo una constante desconocida. Así no se acostumbra hacer el producto: en este caso, 21, multiplicado por una constante, seguirá siendo una constante.

Ejemplo:

$\int 7(x+8)dx = 7 \int (x+8)dx$ . Dado que la resolución completa de este ejemplo requiere de la siguiente fórmula, en el segundo ejemplo de la fórmula 5, terminaremos de resolverlo.

#### **Fórmula 5**

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Sugiere que la integral de una suma (o resta) de funciones es la suma (o resta) de sus integrales.

Ejemplo:

$$\int (x^3 + 5x^2) dx = \int x^3 dx + \int 5x^2 dx$$

Ejemplo:

$$\int 7(x+8)dx = 7 \int (x+8)dx = 7 \left[ \int x dx + \int 8 dx \right] = 7 \left[ \frac{x^2}{2} + 8x \right] + C = \frac{7x^2}{2} + 56x + C$$

Como puedes observar, para la resolución de este ejercicio utilizamos varias fórmulas: la 1 para la derivada de una constante (8), la 2 para la derivada de x, la 4 para “sacar” el 7 del signo de integral y la 5 para obtener la integral de una suma de funciones. En lo sucesivo, se utilizarán implícitamente las fórmulas anteriores para la solución de los ejercicios.



### Fórmula 6

$$\int u^n D_x u dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int (x^2 + 5)^3 2x dx = \frac{(x^2 + 5)^4}{4} + C$$

Podemos ver en este ejemplo que  $2x$  es la derivada de  $(x^2 + 5)^3$ .

La fórmula indica que si encontramos una función elevada a una potencia, ésta se encuentra multiplicada por su propia derivada, y su integral será la propia función elevada a un exponente una unidad mayor y dividida también entre un número igual al del nuevo exponente. En la integración, esta fórmula es la contraparte de la regla de la cadena:  $D_x U^n = nU^{n-1} D_x U$

Ejemplo:

$$\int \sqrt{x^3 + 7x}(3x^2 + 7) dx$$

En este caso, vemos que la expresión entre paréntesis es la derivada de la cantidad subradical; por otra parte, está multiplicada por  $3/2$  (o por  $3$  y dividida entre  $2$ ). Nos puede desconcertar un poco la presencia del radical, pero la misma expresión podemos escribirla como:

$\int (x^3 + 7x)^{1/2} (3x^2 + 7) dx$ . En esta presentación, nos queda claro que  $(x^3 + 7x)^{1/2}$  es  $U^n$ ; en tanto que  $(3x^2 + 7)$  es  $\frac{du}{dx}$ . La aplicación de la fórmula es directa. Entonces,

la solución del ejercicio es:

$$\int (x^3 + 7x)^{1/2} (3x^2 + 7) dx \int u^{1/2} du = \frac{(x^3 + 7x)^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2(x^3 + 7x)^{3/2}}{3} + C$$



### Fórmula 7

Ejercicio:

$$\int e^u D_x u dx = e^u + C$$

$$\int 3x^2 e^{x^3} dx$$

En este ejercicio, nos damos cuenta que  $3x^2$  es la derivada de  $x^3$  (exponente de la función  $e^u$ ), por lo que podemos aplicar la fórmula directamente. Así, obtenemos el resultado siguiente:  $\int 3x^2 e^{x^3} dx = e^{x^3} + C$ .

### Un truco para completar la derivada

En ocasiones, la derivada está en la función, o está casi completa (pues para completarla sólo hace falta multiplicar toda la función por una constante). En esos casos, podemos aprovechar la fórmula 4, que nos permite meter o sacar una constante del signo de integral para completar la derivada. El siguiente ejemplo nos ayudará a comprender esta idea:

$$\int x e^{x^2} dx$$

En esta función, haría falta multiplicar toda la función que está a la derecha del signo de integral para que, siendo  $2x$ , tengamos la derivada completa de  $x^2$ . Esto se logra así:

$$(2)\left(\frac{1}{2}\right) \int x e^{x^2} dx$$

Hasta aquí sólo hemos multiplicado la integral por 1 (recordemos que un número (2) por su recíproco ( $\frac{1}{2}$ ) es igual a 1). Ahora, de acuerdo con la fórmula 4, podemos introducir una constante dentro del signo de integral en calidad de producto. Si hacemos esto con el 2, la integral queda:  $\left(\frac{1}{2}\right) \int 2x e^{x^2} dx$ . En esta función, ya podemos aplicar la fórmula 7 directamente. Nos quedaría multiplicar el resultado



por  $(\frac{1}{2})1/2$ , que se quedó a la izquierda y fuera del signo de integral, para obtener:

$$(\frac{1}{2})\int 2xe^{-x^2} dx = (\frac{1}{2})e^{-x^2} + C$$

Este truco de completar la derivada con una constante que le hace falta puede ser útil en diversas fórmulas, no exclusivamente en ésta.

### **Fórmula 8**

Ejemplo:

$$\int (D_x u / u) dx = \ln|u| + C$$

$$\int dx / x = \ln|x| + C$$

$$\int (2x / x^2) dx = \ln|x^2| + C$$

### **Integración cuando podemos calcular el valor de la constante de integración C**

Hasta el momento hemos mencionado que la  $C$  es una constante arbitraria que utilizamos por desconocer si en la ecuación original (antes de derivarla) tenía valor específico. A veces, si nos dan alguna información adicional, es posible calcular el valor numérico de  $C$ . En los siguientes ejercicios, se muestra cómo puede lograrse.

Ejercicios:

- Si la derivada de una función es  $f'(x)=4x-2$ , obtén la función original, sabiendo que  $f(2)=5$ .

Según los datos del problema, el valor de la función es 5 cuando el de la variable independiente es 2. Dicho de otra manera, el punto  $(2,5)$  pertenece a la función.

Primero integramos la función:

$$\int (4x - 2) dx = 2x^2 - 2x + C$$



Lo anterior significa que  $f(x)=2x^2-2x+C$ , pero  $f(2)=5$ ; por lo mismo,  $2x^2-2x+C=5$ , o  $2(2)^2-2(2)+C=5$ .

Si  $2(2)^2-2(2)+C=4$ , nos indica que  $8-4+C=5$ ; entonces,  $C=1$ .

Luego, la función original es  $f(x)=2x^2-2x+1$ .

- Si  $f'(x)=x^2+2x$ , di cuál es la función original, partiendo de que el punto (3, 50) pertenece a la función.

Procedemos como en el ejemplo anterior. Primero, integramos la función:

$$\int (x^2 + 2x) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + C; \text{ que significa: } f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + C.$$

Como en el caso anterior,  $f(3)=50$ , y por ello:

$$f(3) = \frac{3^3}{3} + 3^2 + C = 50;$$

$$18 + C = 50;$$

$$C = 50 - 18 = 32$$

Así, la función original es  $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + 32$ .

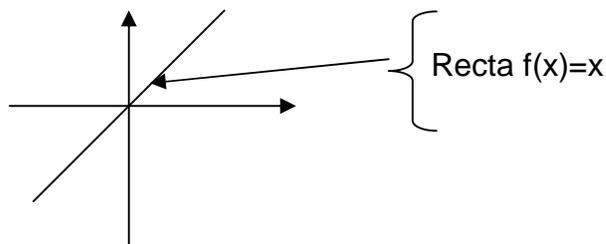
## 4.2. Integral definida

Así como la integral indefinida es una función cuya derivada es la función que queríamos integrar, la definida **es un número que representa el área que la gráfica de la función tiende entre sí misma y el eje de las abscisas**. Ésta se representa mediante el símbolo  $\int_a^b F(x) dx$ .  $F(x)$  es la función a integrar;  $a$  (suscrita al signo de integral) y  $b$  (sobrescrita al signo de integral), las literales conocidas como límites de integración (asimismo,  $a$  es el límite inferior y  $b$ , el superior). En cuanto a los símbolos de integral y  $dx$ , ya los conocemos.

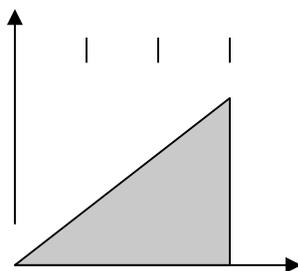


Así como la integral indefinida es una función y puede asimilarse al concepto de antiderivada, **la definida es un número y representa al área entre la gráfica de la curva y el eje x**. Algunos ejemplos nos permitirán comprender este concepto.

Tenemos  $f(x)=x$ . Su gráfica es una recta diagonal que pasa por el origen:



Deseamos calcular tradicionalmente (base por altura sobre dos) el área entre la recta y el eje x, tomada entre el origen y  $x=3$ . Sabemos que la base del triángulo es 3 (la distancia entre el origen y  $x=3$ ), pero nos falta conocer la altura del triángulo que aparece sombreado en la figura siguiente:



Entonces, tenemos un triángulo cuya base y altura son 3 respectivamente. Su área es  $(3)(3)/2$ , es decir, 4.5.

Si deseamos calcular el área definida anteriormente por medio de integrales, los límites de integración estarán dados por  $x=0$  (inferior) y  $x=3$  (superior). A continuación, desarrollamos el ejercicio de la integral definida y lo explicaremos posteriormente.



$\int_0^3 x dx = x^2/2 + C \Big|_0^3 = 3^2/2 + C - 0^2/2 - C = 4.5$ . El resultado es congruente con lo obtenido por medios geométricos<sup>3</sup>. Ahora bien, los límites de integración indican las abscisas (las  $x$ ) entre las cuales deseamos calcular el área. El límite inferior representa el inicio (en nuestro ejemplo,  $x=0$ ); y el límite superior, el final (en nuestro ejemplo,  $x=3$ ). Como has notado, para obtener la integral definida, primero tuvimos que encontrar la indefinida ( $x^2/2$ ). Después, sustituimos en ésta el valor del límite superior de integración ( $3^2/2$ ) y posteriormente el límite inferior ( $0^2$ ), y restamos ambos valores. Nos podemos percatar de que la constante de integración tiene primero signo positivo y después negativo, por lo que en todos los casos se cancela. Por eso, en la definida no se acostumbra manejar las constantes de integración.

En resumen, para obtener una integral definida:

- Encontramos primero la indefinida, que será la materia prima con la que trabajaremos.
- A continuación, sustituimos en la indefinida el valor del límite superior para conseguir un primer número.
- Enseguida, sustituimos el valor del límite inferior en la indefinida para obtener un segundo número.
- Restamos el primer número del segundo, y ése es el valor de la definida.

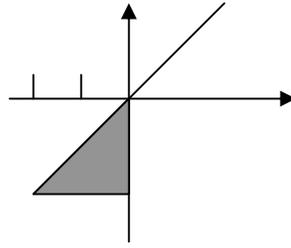
NOTA: cuando la gráfica de la función cuya integral definida buscamos se encuentra debajo del eje de las abscisas, se obtiene un área negativa. Veamos el siguiente ejemplo, tomado de la función  $f(x)=x$ .

$$\int_{-2}^0 x dx = x^2/2 + \Big|_{-2}^0 = 0^2/2 - (-2)^2/2 = -2$$
. La gráfica del área obtenida

aparece a continuación:

---

<sup>3</sup> El estudiante se preguntará para qué tanta complicación si el resultado podría obtenerse por medios más sencillos. La respuesta es que, para funciones menos triviales, no hay medio geométrico simple para llegar al resultado; además, la integral definida es una herramienta poderosa y fácil de usar.



Esta característica puede desconcertarnos cuando la gráfica de la función tiene partes abajo y arriba del eje de las abscisas en el intervalo cuya integral definida deseamos obtener. Si conjuntamos los dos ejercicios anteriores, podremos observar esta característica.

$\int_{-2}^3 x dx = x^2/2 \Big|_{-2}^3 = 3^2/2 - (-2)^2/2 = 4.5 - 2 = 2.5$ . Notamos que este valor es más pequeño, a pesar de que estamos ante un intervalo más grande. El resultado se debe a la característica que ya se mencionó, pues en esta función el área entre  $-2$  y  $0$  está debajo del eje de las abscisas; y el área entre  $0$  y  $3$ , sobre éste.

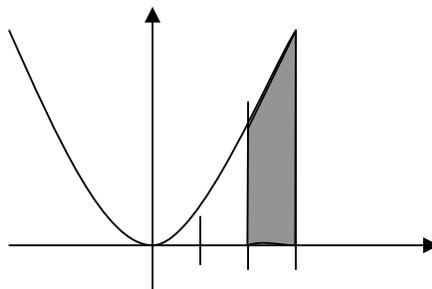
En funciones no lineales, obtener el área entre la curva y el eje  $x$  no representa un procedimiento geométrico sencillo. Pero, mediante la integral definida, el proceso se simplifica. Veamos un ejemplo.

Encuéntrese el área bajo la función  $f(x)=x^2$ , entre  $x=2$  y  $x=3$ .

Procedemos, como en ejercicios anteriores, buscando la integral indefinida y sustituyendo los límites de integración.

$$\int_2^3 x^2 dx = x^3/3 \Big|_2^3 = 3^3/3 - 2^3/3 = 9 - 8/3 = 19/3.$$

Éste es un esquema aproximado del área obtenida:





### 4.3. Métodos de integración

A veces, no es posible encontrar las integrales (o *primitivas*) directamente con las fórmulas revisadas hasta aquí. Aun cuando hay diversos métodos de integración, en estos apuntes explicamos únicamente el de integración por partes. Sin embargo, el esbozo que presentamos debe ser complementado con el estudio de las lecturas básicas sugeridas, y sobre todo, con mucha práctica.

#### Integración por partes

Si tenemos dos funciones continuas cualesquiera de  $x$ , a las que denominamos convencionalmente  $u$  y  $v$ , recordaremos que  $(uv)' = uv' + u'v$ . Es decir, la primera por la derivada de la segunda más la segunda por la derivada de la primera. Esto significa que  $uv' = (uv)' - u'v$ . Si integramos ambos lados de la función con respecto de  $x$ , nos encontramos con:  $\int uv' dx = \int (uv)' dx - \int u'v dx$ . Además, es necesario precisar para  $\int (uv)' dx$  una función cuya derivada con respecto de  $x$  sea  $(uv)'$ . Desde luego, esa función es  $uv$ ; por eso, podemos expresar que  $\int uv' dx = uv - \int u'v dx$ . (Para presentar las expresiones de una manera más simple, se omite la constante de integración, misma que reaparecerá definitivamente al integrar el segundo término del miembro de la derecha).

Si sustituimos  $v' dx$  por  $dv$  y  $u' dx$  por  $du$ , obtenemos la siguiente expresión, a la que podemos llamar fórmula de integración por partes:  $\int u dv = uv - \int v du$ . Evidentemente, deseamos aplicar esta fórmula no a funciones de  $u$  o  $v$ , sino de  $x$ . Entonces, es necesario expresar  $f(x)$ , de tal manera que aparezca como el producto de dos factores o partes (de allí el nombre de integración por partes), eligiendo una función  $u$  y una diferencial  $dv$ , de modo que  $f(x)dx = u dv$ .



Por ejemplo, si se tiene la función

$$\int x e^x dx$$

$$u = x$$

$$dv = e^x dx$$

$$du = dx$$

$$v = \int e^x dx = e^x + C_1$$

$$\int x e^x dx = uv - \int v du$$

$$\int x e^x dx = x(e^x + C_1) - \int (e^x + C_1) dx$$

$$= x e^x + C_1 x - e^x - C_1 x + C = x e^x - e^x + C$$

En esta ocasión, definimos a  $u$  como  $x$ , en tanto que  $dv$  es  $e^x dx$ . Haciendo las sustituciones correspondientes, llegamos al resultado final. (En este momento, entendemos que el método se llama **integración por partes** porque realizamos la operación, por así decirlo, en dos tiempos, utilizando el viejo dictado “divide y vencerás”. Pero no siempre se acierta al dividir las funciones; a veces, debe intentarse por varios métodos).

La integración por partes también puede utilizarse para resolver integrales definidas, tal como se puede valorar en el ejemplo siguiente.

Obtén el área bajo la curva de la función señalada a continuación, entre  $x=1$  y  $x=2$ :

$$\int_1^2 x \ln x dx$$

$$u = \ln x$$

$$dv = x dx$$

$$du = dx/x$$

$$v = \int x dx = x^2/2$$

$$\int_1^2 x \ln x dx = (\ln x)(x^2/2) \Big|_1^2 - 1/2 \int_1^2 x dx = x^2 \ln x / 2 \Big|_1^2 - 1/2(x^2/2) \Big|_1^2 = (2 \ln 2 - 0) - (1 - 1/4) = 2 \ln 2 - 3/4$$

NOTA: puedes encontrar el valor numérico del logaritmo natural de 2 con una calculadora para hallar el resultado aproximado.



#### 4.4. Aplicaciones de la integral

El concepto de **marginalidad**, usado en economía, indica aproximadamente lo que se modifica una función cuando la variable independiente cambia una sola unidad. Por ejemplo, el costo marginal de producción es más o menos lo que cuesta producir una unidad más del artículo. El **ingreso marginal** es lo que aumenta el ingreso al venderse una unidad más. En este sentido, los marginales se identifican con el concepto de derivada.

Frecuentemente, es más fácil obtener las funciones de **costo variable unitario** (o marginal) y las de **ingreso marginal** que las de costo o ingreso total, respectivamente. El cálculo integral nos permite, conociendo las primeras, hallar las segundas.

En ocasiones, se tiene el costo variable unitario de fabricación de un producto y alguna otra información, como el costo total en una instancia dada, y se desea obtener la función de costo total. Éste es la integral del costo variable unitario o marginal.

Ejemplo:

Una empresa que fabrica y vende un solo producto ha calculado que el costo marginal de ese producto está dado por la función  $CM=40-.0004x$ , en donde  $x$  es el número de unidades producidas. También se sabe que cuando son generadas mil, el costo total es \$50,000. Encuentra la función de costo total y calcula el costo de producir mil 500 unidades, suponiendo que la función todavía se puede aplicar a ese volumen de producción.

En primer lugar, integramos la función de costo marginal:

$\int (40-.0004x)dx = 40x -.0002x^2 + C$  . Por lo mismo, la función de costo total está dada por  $CT= 40x -.0002x^2 + C$  . Pero se nos informa que el costo total es \$50,000 cuando la producción corresponde a mil unidades, por ello:



$$50,000 = 40(1000) - .0002(1000)^2$$

$$50,000 = 39,800 + C.$$

Lo anterior quiere decir que  $C=10,200$ , y nuestra función queda como:

$$CT = 40x - .0002x^2 + 10,200.$$

En este caso, \$10,200 representa los costos fijos, es decir, aquellos en los que se incurre aun cuando no exista producción.

Para calcular la segunda parte del problema, simplemente sustituimos las mil 500 unidades en la función de costo total, para obtener lo siguiente:

$$CT = 40(1500) - .0002(1500)^2 + 10,200.$$

Al realizar las operaciones correspondientes, nos encontramos con que el costo total para las mil 500 unidades es \$69,750.

Si la función de ingreso marginal para el producto de un pequeño industrial está dada por la función  $IM = 1000 - 10x + 3x^2$ . En ésta,  $IM$  es, desde luego, el ingreso marginal y  $x$  el número de unidades vendidas. Adicionalmente, sabemos que si el industrial no vende ninguna unidad, su ingreso será igual a cero.

Además, se nos pide encontrar la función de ingreso total y el ingreso que tendría el fabricante si vendiera 50 unidades.

Como en el caso anterior, debemos:

- Encontrar la función de costo total integrando la función de costo marginal.
- Posteriormente, sustituir las condiciones iniciales para dar con el valor de la constante de integración  $C$  (el ingreso total  $IT=0$ , cuando la cantidad vendida  $x=0$ ).
- Por último, sustituir en la función encontrada  $x=50$ , para identificar el costo total correspondiente a ese número de unidades.



A continuación, se resuelve el ejercicio:

$$\int (1000 - 10x + 3x^2) dx = 1000x - 5x^2 + x^3 + C$$

$$IT = 1000x - 5x^2 + x^3 + C$$

$$0 = 1000(0) - 5(0)^2 + 0^3 + C; C = 0$$

$$IT = 1000(50) - 5(50)^2 + 50^3$$

$$IT = 162,500$$

Además, la integral definida puede ser útil para solucionar algunos problemas de costo, donde se nos pide cierta información numérica.

Ejemplo:

La función de costo marginal de una industria está dada por:  $CM = 0.3x + 4$ . Donde  $x$  es el número de unidades. Si la producción actual es de 100 unidades mensuales, di cuál será el incremento en el costo total si se eleva la producción a 120 por el mismo periodo. La función de costo total es la integral de la función de costo marginal. Adicionalmente, queremos saber la diferencia del costo total de producir 120 unidades en comparación con el de producir 100. Es decir,  $CT(120) - CT(100)$ . La integral definida entre estos valores nos proporciona la información deseada.

Veamos:

$$CT = \int_{100}^{120} (0.3x + 4) dx = (0.15x^2 + 4x) \Big|_{100}^{120} = [(0.15)120^2 + 4(120)] - [0.15(100)^2 + 4(100)]$$

$$CT = 740$$

En resumen, hay diversas aplicaciones adicionales del cálculo integral a la administración, contaduría e informática. Además, éste permite comprender y utilizar conceptos diversos de economía y finanzas que encontrarás conforme avances en tus estudios.



## Bibliografía

### Básica

1. Allendoerfer, C. y C., Oakley, *Matemáticas universitarias*, 3ª. ed. México, McGraw-Hill, 1990, 383 pp.
2. Ayra, Jagdish C. y Lardner, Robin W., *Matemáticas aplicadas a la administración y la economía*, 2ª. Ed., México, Prentice –Hall, 1985, 776
3. Budnick, Frank S., *Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales*, 3ª. Ed., México, McGraw-Hill, 1990, 948 pp.
4. Edward, S. y Penny, *Cálculo*, México, Prentice-Hall, 1966, 1036 pp.
5. Haeussler Jr., Ernest F. y Paul, Richard S., *Matemáticas para Administración, economía, ciencias sociales y de la vida*, México, 8ª. Ed., México, Iberoamérica, 1996, 941 pp.
6. Hoffman, L., *Cálculo aplicado*, México, McGraw-Hill, 1989, 692 pp.
7. Hughes-Hallet, D., y Gleason, Andrew M., *Cálculo*, México, Cecsca, 1995, 683 pp.
8. Purcell, Edwin J., *Cálculo*, México, Prentice-Hall, 1993, 928 pp.

### Complementaria

9. Apóstol P., *Calculus*, vol. 1, España, Revertre, 1982, 813 pp.
10. Courant, R. F., *Introducción al cálculo y análisis matemático*, vol. 1, México, Limusa, 1971, 671 pp.
11. Draper, J. y J. Klingman, J. , *Matemáticas para administración y economía*, 2ª. ed., México, Harla, 1987, 689 pp.
12. Spiegel, M. , *Álgebra superior*, México, McGraw- Hill, 1970, 312 pp. (Serie Schaum).
13. Spivak, M., *Calculus*, España, Revertre, 1981, 843 pp.



### **Bibliografía específica sugerida (lecturas básicas)**

14. Eslava E., María Emilia y Velasco Q., José R., *Introducción a las matemáticas universitarias*, Colombia, McGraw-Hill, 1997, 568 pp.
15. Sevilla, Joel et al., *Tópicos de matemáticas para administración y economía*, 4ª. ed., México, Trillas, 1992, 260 pp.
16. Tan, S.T., *Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales*, 2ª. ed., México, Thomson, 2002, 992 pp.



**Apuntes para la asignatura Matemáticas Básicas**, es una edición de la Facultad de Contaduría y Administración. Se terminó de imprimir en agosto de 2005. **Tiraje:** 150 ejemplares. **Responsable:** L.A.C. y Maestra Gabriela Montero Montiel Jefe de División Sistema Universidad Abierta. **Edición a cargo de:** L.A.C Francisco Hernández Mendoza. **Revisión a cargo de:** Lic. María del Carmen Márquez González y L.C. Nizaguié Chacón Albarrán.